

BROFFICE NA DIGITAÇÃO DE FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Aureo Quintas Garcia¹, Gilson Tumelero ²

Resumo

Diante do desenvolvimento tecnológico, que vivemos é cada vez mais necessário que se domine ferramentas de informática que nos auxiliem em nosso trabalho. Em matemática não é diferente, uma vez que, é nesta ciência que mais se evidencia a necessidade do uso de softwares ligados tanto a área de ensino quanto a área de pesquisa (num sentido amplo, estamos nos referindo às aplicações às engenharias).

No que diz respeito a softwares educacionais, estaremos apresentando uma ferramenta muito eficiente na digitação de fórmulas matemáticas. No mercado existem diversos softwares proprietários que desempenham tais funções muito bem. Porém nossa intenção é apresentar um software livre que desempenhe de forma bastante eficiente esse objetivo e que é de fácil aprendizagem.

Mais especificamente iremos apresentar uma suite de produtividade livre e completa; o BrOffice, que possui todas as funcionalidades de outras suites proprietárias mais conhecidas.

A nossa apresentação se dará na forma de uma oficina que será constituída pelos seguintes itens:

1. Construção e edição de fórmulas matemáticas usando o BrOffice editor de texto. Nesta parte da oficina, estaremos propondo que os próprios participantes construam e editem expressões matemáticas previamente sugeridas. Expressões estas que vão das mais simples usadas no ensino fundamental até as mais elaboradas usadas no ensino superior.

¹Professor da Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de União da Vitória - FAFIUV

²Professor da Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de União da Vitória - FAFIUV

2. Utilização do BrOffice planilha: Iremos mostrar e comparar as aplicações mais comuns desta planilha com outras conhecidas. Por exemplo, confecções de tabelas, operações elementares entre linhas e colunas.

CONSTRUÇÃO DE RACIOCÍNIOS PARA AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Lilian Akemi Kato ³

Resumo

Uma das principais dificuldades dos acadêmicos ao ingressarem no curso de Matemática, refere-se ao desenvolvimento de habilidades lógico-matemáticas necessárias para justificarem cada uma das etapas envolvidas numa resolução matemática, bem como para munirem-se de argumentos consistentes que embasem suas atitudes.

Tais competências podem ser aprimoradas por meio de atividades adequadas que suscitem e favoreçam a construção dos raciocínios básicos, necessários para as demonstrações matemáticas, além de contribuir para que os futuros professores de matemática desenvolvam tais conhecimentos que lhes permitam responder às necessidades de sua formação profissional.

Nesse sentido, este mini-curso pretende abordar os elementos da linguagem e da lógica matemática mostrando como esses elementos são usados nas demonstrações matemáticas. Pretende-se trabalhar com os elementos da lógica relacionando-os com a linguagem cotidiana e a linguagem matemática. Os participantes deverão fazer alguns exemplos de demonstrações clássicas, elementares, da Matemática.

³Profesora da Universidade Estadual de Maringá

O USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Marie Claire Ribeiro Póla ⁴

Resumo

A construção do conhecimento no ser humano se faz também através de situações de conflito e o jogo é um processo visível onde as pessoas estão constantemente tendo que resolver conflitos. Essa tensão que o jogo provoca, gera conhecimento. Logo, não é o jogo que traz o conhecimento, mas o processo de pensar. Durante o mini-curso os alunos terão a oportunidade de conhecer vários jogos que poderão ser usados para trabalhar conteúdos de Matemática e, principalmente, discutir sobre as vantagens de usá-los no ensino de Matemática.

⁴Profesora da Universidade Estadual de Londrina

O USO DE TECNOLOGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Marie Claire Ribeiro Póla ⁵

Resumo

O computador e todas as facilidades que ele oferece para representar objetos do mundo real, simular situações do cotidiano, pode ser um poderoso aliado do professor de Matemática. Ele favorece uma aprendizagem por descoberta, facilita a visualização, a compreensão de conceitos difíceis de serem compreendidos com as velhas tecnologias estáticas como o lápis, o papel, o giz, o quadro. Abrem-se novas possibilidades para imaginar, estimular o raciocínio, levantar hipóteses e testá-las. Finalmente as aulas de matemática podem ser vistas como laboratórios, como as de biologia, de física. Na palestra serão mostrados alguns tipos de softwares e sites da Internet que podem ser usados nas aulas de Matemática.

⁵Profesora da Universidade Estadual de Londrina

APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: UM OLHAR PARA A CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS NAS SÉRIES INICIAIS

Tatianne Andréia Verboski ⁶

Resumo

A educação matemática a tempos vem permanecendo em constante evolução e consolidação, buscando enfatizar as diferenças entre a matemática enquanto ciência pura e o trabalho realizado no campo do ensino, principalmente com relação ao processo de transposição didática da matemática realizada pela escola. As diferenças entre a ciência matemática e a sua transposição didática são de extrema importância quando discutimos a natureza da atividade matemática presente na escola. Nosso trabalho tem como objetivo proporcionar questionamentos acerca da importância de uma melhor compreensão da atividade matemática realizada pelos nossos professores de séries iniciais, conseqüentemente, de seus alunos, uma vez que muito se discute a importância de se promover a capacidade do aluno de aprender a aprender.

Palavras-chave: Aluno, Educação, Matemática, Professor.

Introdução

Durante muito tempo, a escola desenvolveu a matemática sem se preocupar com o processo de desenvolvimento cognitivo e afetivo-social de seus alunos, onde o “fazer matemática” era o principal objetivo da escola e, não mudava seus hábitos, mesmo ao constatar que essa atitude transformava o ensino desta disciplina numa ferramenta de exclusão social, propiciando também, a expulsão gradativa da criança do ambiente da real aprendizagem escolar.

⁶Graduada em Licenciatura Plena em Matemática e Especialista em Matemática Aplicada pela FAFI-UV.

Geralmente, a atividade matemática é vista como uma atividade distante das capacidades cognitivas das crianças, sendo assim, o “fazer matemática” fica extremamente dependente da mediação realizada pelo professor. Sendo o professor quem proporciona o conhecimento essencial para habilitar o fazer matemático da criança.

Golbert (2002) citando Greeno (1989):

[...] os estudantes trazem para a sala de aula muito conhecimento adquirido informalmente, na sua maior parte intuitivo e implícito e impossível de ser articulado e refletido. É na sala de aula que devem surgir oportunidades para que as intuições sejam aplicadas na construção de explicações e interpretações, isto é, que sejam objeto de reflexão consciente e intencional. (GOLBERT, 2002, p. 45)

Tendo consciência que a educação matemática pode ser considerada um espaço escolar destinado à realização de atividades mais abrangentes que a própria matemática, deve-se questionar o quanto de matemática pode-se propor aos alunos das séries iniciais na perspectiva da educação matemática. Todavia, os alunos podem apresentar dificuldades. Tais dificuldades podem ser indícios da própria concepção do “fazer matemática” presente num grupo de professores que busca compreender a papel do professor como mediador do conhecimento matemático.

Sendo assim, surgem alguns questionamentos: Que tipo de mediação realizamos em nossas escolas? Valorizamos cada aluno em seu potencial de fazer matemática? Tais questionamentos buscam oportunizar dentro da comunidade científica o debate acerca da produção matemática dos alunos que se encontram nas séries iniciais. Podemos destacar a importância dos estudos científicos no campo da educação matemática na busca da compreensão dos processos de constituição da produção matemática nas séries iniciais.

Construção do Conhecimento Matemático

Levando em consideração a construção histórica do conhecimento matemático, fica

evidente que o mesmo tem sido elaborado a partir da tentativa do homem de compreender e interagir em seu mundo. Na Grécia Antiga, berço da Matemática, muito pouco os que tinham acesso ao conhecimento formal. Podemos citar, por exemplo, os escribas que eram considerados homens especiais, dotados de inteligência acima da média, os únicos capazes de decifrar e desfrutar dos conhecimentos geométricos e aritméticos da época.

Segundo Miorim, a escola Pitagórica foi à responsável pela concepção de que os homens que trabalham com os conceitos matemáticos são superiores aos demais. Baseando-se nesses fatos e em estudos de Piaget, os quais afirmam que a criança constrói o conhecimento através da interação com o outro e com o mundo, fica contraditório que algumas escolas ainda tenham uma visão de que a criança, ao ingressar na escola, não é dotada de conhecimentos, mantendo, dessa forma, um ambiente inoportuno aos seus alunos. Para Kamii (1994), o ambiente social e a situação que o professor cria são cruciais no desenvolvimento lógico-matemático.

É evidente que o processo de ensino-aprendizagem nas séries iniciais é menos analítico que nas séries finais. Porém, sabemos que é nessas séries iniciais que as crianças dão início a formação dos primeiros conceitos científicos.

Com este cenário, vemos a Matemática, com seus conceitos caracterizados de maneira social. Uma vez que, a relação existente entre o conhecimento e as situações matemáticas trabalhadas em sala de aula faz ressaltar, também, a influência do meio cultural no ensino-aprendizagem da Matemática. A educação matemática tem seu contexto social em diferentes lugares, em diferentes culturas e em diferentes sociedades, propiciando assim, diferentes organizações escolares, diferentes filosofias e diferentes metas. Sobretudo, a Matemática tem relevância para todos. Todos precisam saber um pouco de Matemática para que possam entender, por exemplo, as operações numéricas e a tecnologia.

Através das teorias de Vygotsky, professor é aquele que possibilita esse ambiente, que leva a criança a estabelecer relações, a pensar, indo além do que vê. Assim, ela

viverá e (re) descobrirá o conhecimento, construindo-o de forma ativa, posicionando-se como parte integrante de seu mundo, considerando-se capaz de promover mudanças em si mesma e em seu redor. A escola deve ser um ambiente “matematizador”, que permita desafios, construções, possibilidades.

Atualmente ainda pode-se perceber a idéia de que poucos conseguem apropriar-se do conhecimento matemático, considerado para muitos, como difícil e complexo. O aluno, ao ingressar na escola, já apresenta certa desconfiança à matemática por se sentir incapaz. Tal idéia pode ou não ser verídica dependendo da postura pedagógica do professor, que muitas vezes não escuta as necessidades de seus alunos e acaba evidenciando a heterogenia de conhecimento entre deles, e acaba não propiciando um “fazer matemática” satisfatório, até por acreditar que aprender é “saber na ponta da língua” o que foi ensinado.

Autonomia é ao mesmo tempo moral e intelectual, e esse objetivo guia o professor na decisão de como interagir com seus alunos durante cada momento do trabalho de matemática. Quando interagimos com crianças de maneiras que correspondem a seus pensamentos e necessidades, nós as ajudamos a se desenvolverem moral e intelectualmente. Quando interagimos com elas a partir da imposição de parâmetros adultos, ao contrário, nós apenas lhes ensinamos a concordar conosco em cada momento. (KAMII, 1994, p. 188)

Partindo do pressuposto teórico de que manuseando objetos matemáticos o aluno poderá construir mais facilmente seu conhecimento. A aprendizagem matemática requer ação cognitiva que possibilita a manipulação de ferramentas e objetos que merecem destaque na educação matemática.

Esse tipo de debate na educação matemática é fundamental, pois colocam em discussão as diferentes perspectivas de conceber a atividade matemática. Para Piaget, várias atividades realizadas pela criança se assemelham as atividades realizadas pelo

matemático, mas temos que refletir sobre tais semelhanças.

Sem dúvida, há diferença entre a atividade matemática realizada por uma criança de série inicial e de um matemático. Contudo, isso pode indicar até onde as escolas das séries iniciais realizam na sua prática pedagógica transposição didática da matemática, ou ainda, segundo Bachelard (1996), as atividades realizadas em sala de aula com as crianças podem ser consideradas atividades matemáticas, ou seja, o professor pode transformar uma atividade em benefício da aprendizagem e do desenvolvimento da criança.

Na perspectiva do conhecimento, as atividades desenvolvidas pelas crianças, tais como: contar, comparar, medir, registrar, é de extrema importância para o seu desempenho na matemática, pois a partir delas e com auxílio delas, que podemos dar continuidade ao processo de construção dos conceitos matemáticos que permitirão futuramente a realização de novas atividades matemáticas. Tais atividades, inicialmente, são apoiadas por ferramentas matemáticas, e gradualmente permitem ao aluno a incorporação de objetos que ajudam a garantir que tais atividades possam no futuro aperfeiçoar a atividade matemática.

Utilização do Algoritmo

A compreensão do algoritmo produzido no processo de resolução de problemas matemáticos tem sido foco de inúmeras pesquisas. Considerado o algoritmo como uma seqüência finita de ações voltadas à realização de um objetivo, possibilitando também, uma produção categorizada como alternativa, como fragmento do pensamento matemático do aluno. Ou seja, o algoritmo não precisa ter sua própria estrutura e ser seguido por completo, o aluno pode adaptá-lo ou construí-lo da maneira que lhe convier.

Como consequência, a investigação do pensamento matemático, voltado ao algoritmo como forma de registro, exige que se considere que tal produção pode revelar o processo de pensamento e, assim, requer do professor um trabalho de interpretação e dedução que permita, também, a produção de hipóteses voltada ao processo pelo qual

o algoritmo é “plano de fundo”. A análise destes algoritmos é de essencial compreensão na atividade matemática realizada pela criança nas séries iniciais.

A apresentação do processo do pensamento matemático de forma mais explícita, além da análise de hipóteses por parte do professor, requer um trabalho de mediação junto ao aluno a fim de revelar elementos que somente a interpretação da representação escrita do algoritmo em si não pode traduzir, desvinculando a real complexidade da produção matemática das crianças nas séries iniciais. Tendo assim, como objetivo a revelação dos processos mentais utilizados pela criança no próprio processo de resolução de problemas, essa análise deve associar o estudo em questão com discussões com as próprias crianças, proporcionando novos desafios metodológicos no campo da educação matemática, contribuindo para o impasse epistemológico sobre o fazer matemática das crianças das séries iniciais.

Se, por ventura, o professor ou até mesmo a escola, ignoram os processos mentais que norteiam os algoritmos desenvolvidos pelas próprias crianças, o ensino de matemática reduzir-se a reprodução de algoritmos muitas vezes considerados como os únicos “corretos”. A não identificação de tais relações ajuda o aluno a abandonar o seu processo de desenvolvimento de algoritmos, abdicando do pensamento autônomo, passando apenas a utilização dos algoritmos evidenciados pela escola, mesmo sem entender seu real significado, e, portanto, fica sem representar seu processo de pensamento. Então, a escola apenas contribui com a construção da representação social de “fazer matemática” como uma simples reprodução de algoritmos fechados e, muitas vezes, sem significado para o aluno.

O processo de ensino e aprendizagem da matemática apresenta peculiaridades a curto e a longo prazo. Frequentemente, o professor tem que encontrar a situação, a explicação, o comentário e a questão apropriados, bem como, algumas vezes, o silêncio, para observar e escutar os alunos. Mas estas medidas, a curto prazo, não serão suficientes se não estiverem relacionadas ao processo de aprendizagem da matemática, a longo prazo, caracterizado por lentidão e diversidade de estratégias. (GOLBERT, 2002, p.129)

Tendo em vista o papel do professor como um mediador do conhecimento matemático, deve-se permitir que o professor tenha conhecimentos essenciais sobre os processos mentais e os algoritmos convencionais. Proporcionando assim, uma sala de aula de matemática subdividida em um espaço de investigação, revelação, descrição e análise das produções dos alunos. Acreditamos que, valorizando os processos mentais apresentados pelos alunos de uma classe em diversas situações, como sugere Vergnaud (1994), o professor poderá tornar-se um verdadeiro mediador da aprendizagem da matemática e assim, evidenciando o “fazer matemática” de maneira clara e objetiva.

Considerações Finais

A escola é vista como a encarregada de transmitir sistemas organizados de conhecimento e modos de funcionamento intelectual às crianças, tendo um papel essencial na promoção do desenvolvimento psicológico dos indivíduos que vivem em sociedade.

Para que a escola realmente assuma esse papel, talvez, o professor precise acreditar que é possível mudar, conscientizando-se de que os avanços tecnológicos e que os estudos científicos sobre a educação promovem novos tempos, com novas necessidades. Para alcançar satisfatoriamente essas novas necessidades, o professor deve buscar conhecimento que proporcionem uma melhor compreensão do processo ensino/aprendizagem, da educação e do papel da escola no mundo contemporâneo, levando em consideração seu papel de propiciador de situações de aprendizado ao aluno para que ele produza seu

próprio conhecimento.

Mas isso não depende somente do o professor, pois para que ele possa acompanhar as mudanças sociais, tecnológicas e educacionais, proporcionando assim, uma educação de qualidade, todos os envolvidos na escola, gestores e comunidade, por exemplo, devem oportunizar aos professores um ambiente estimulador ao estudo e à pesquisa.

A oportunidade da formação continuada aos professores no seu próprio ambiente de trabalho é um bom caminho. Outro caminho é a formação de grupos de estudo e pesquisa, coordenados pelos próprios professores, e com ajuda de professores de fora, origem debates sobre temas pertinentes às necessidades da prática docente e seu desejo de apropriar de novos conhecimentos. Dessa forma, estabelecem-se condições para que os professores abracem a construção de um projeto coletivo na escola com a participação de toda a comunidade. Talvez assim, a escola contribua para a formação de suas crianças capazes de provocar uma transformação em si mesmo e no mundo ao seu redor.

Referências Bibliográficas:

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1997.

GOLBERT, C. S. **Matemática nas séries iniciais**. Vol. 2. Rio Grande do Sul : Meidação, 2007.

GOLBERT, C. S. **Novos rumos na aprendizagem da matemática**: Conflitos, reflexão e situações-problemas. Rio Grande do Sul : Meidação, 2002.

KAMII, C. **Aritmética**: Novas perspectivas implicações da teoria de Piaget. 3. ed. São Paulo : Papyrus, 1994.

KAMII, C. **Desvendando a aritmética**: Implicações da teoria de Piaget. 8. ed. São Paulo: Papyrus, 1995.

MAGINA, S.; CAMPOS, T.; NUNES, T., GITIRANA, V. **Repensando Adição e Subtração**: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

MIORIM, M. Â. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, [s.d].

PANIZZA, M. **Matemática na educação e nas séries iniciais**: Análises e propostas. São Paulo: ARTMED, 2005.

PIAGET, J. **Psicologia e epistemologia**: Por uma teoria do conhecimento. Rio de Janeiro: Forense, 1973.

POZO, J. I. (Org.). **A Solução de Problemas**: Aprender a Resolver, Resolver para Aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SANTALÓ, L. A. Matemática para não-matemáticos. In: PARRA, C. et. al. **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

SMOLE, K S; DINIZ, M. I. (Orgs.). **Ler, Escrever e Resolver Problemas**: Habilidades Básicas para Aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In NASSER, L. **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. p. 1-26, 1993.

ZUNINO, D. L. **A Matemática na Escola**: aqui e agora. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 1995.

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS PARTINDO DE UM AXIOMA

Sandro L.Schneider⁷, Gilson Tumelero⁸.

Resumo

Educadores matemáticos, buscam novas maneiras de se ensinar a matemática, uma vez que o ensino da mesma vem sendo muito criticada e até mesmo questionada. Neste trabalho apresentamos uma abordagem do estudo de áreas alternativo à alguns métodos convencionais.

Palavras-chave: Área, Axioma, Matemática.

Introdução

Ouvimos muitos comentários sobre a aprendizagem matemática. Existem várias correntes apontando problemas e algumas possíveis de solução. Em conversas informais com alunos, alguns dizem que acham a disciplina de matemática difícil por ter uma grande quantidade de fórmulas e regras a serem seguidos. Pensando nisso é que apresentamos esse trabalho, para mostrar que em alguns casos basta entender o raciocínio lógico e não será necessário decorar fórmulas.

O conceito de áreas alcançou significativo desenvolvimento com Egípcios, quando Sesóstris repartiu suas preciosas terras entre uns poucos agricultores privilegiados. Todos os anos, durante o mês de junho, o nível das águas do Nilo começava a subir. Era o início da inundação, que durava até setembro. Ao avançar sobre as margens, o rio derrubava as cercas e demarcações de divisas dos terrenos. Assim da necessidade de novas medições é que se deu o desenvolvimento de suas técnicas.

⁷Aluno de graduação de Licenciatura em Matemática - FAFI

⁸Professor orientador do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras - FAFI - União da Vitória - E-mail:Tumeleromat@yahoo.com.br

A geometria babilônia se relacionava intimamente com a mensuração prática. Dentre as tábuas matemáticas babilônicas encontramos a chamada Plimpton aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C., a qual indicava que estavam familiarizados com as regras gerais da área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (e talvez da área de um triângulo genérico), de um trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, geralmente e do volume de um prisma, reto de base trapezoidal.

Áreas

Então vamos estudar o conceito de áreas. Para isso é necessário definir:

- Região triangular: a parte interna do triângulo.
- Região poligonal: o interior da região poligonal é o conjunto dos pontos que lhe são interiores. A fronteira da região poligonal é constituída pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior.

A Geometria é apoiada sobre alguns postulados ou axioma (são verdade aceitas ou naturais) definições e teoremas, sendo que essas definições e postulados são usados para demonstrar a validade de cada teorema.

A noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos seguintes axiomas:

Axioma 1 *Toda região poligonal corresponde um número maior que zero. O número a que se refere esse axioma é chamado de área.*

Axioma 2 *Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área é a soma das áreas daquelas regiões.*

Axioma 3 *Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.*

Axioma 4 *A área de um quadrado de lado medindo l , dado por $l \cdot l$ isto é l^2 .*

Lembrando que o quadrado é um quadrilátero que possui quatro ângulos internos retos, cujos lados possuem a mesma medida.

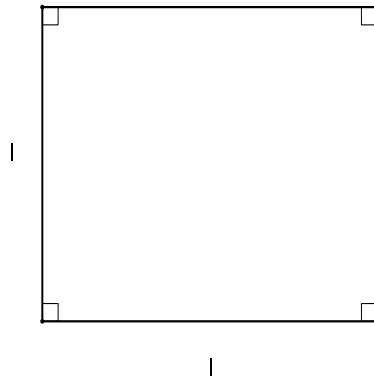


Figura 1

Pelo axioma 4 temos: $A_q = l^2$

Área do Retângulo

O retângulo é um quadrilátero que possui quatro ângulos internos retos, cujos lados opostos têm a mesma medida.

Como calcular a área do retângulo?

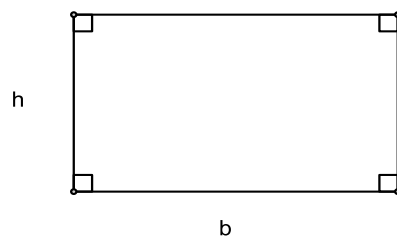


Figura 2

A partir deste retângulo construímos um quadrado de lado $h+b$ conforme a figura a seguir.

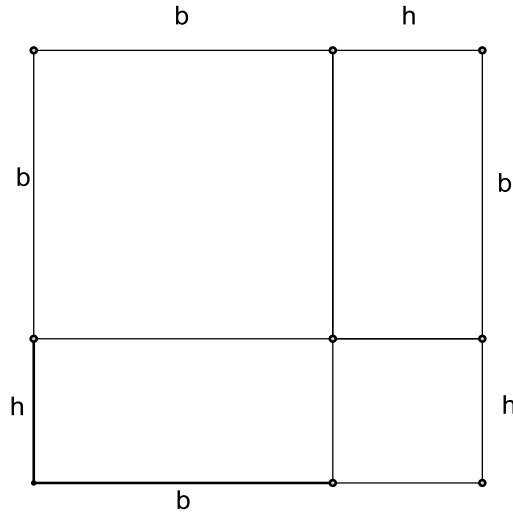


Figura 3

Na figura 3 temos um quadrado de lado $h+b$, cuja área é dada pelo axioma 4, ou seja:

$$A_q = (h + b)^2 = h^2 + 2.h.b + b^2 \quad (1)$$

Podemos calcular a A_q de forma diferente, somando as áreas das figuras que o compõe e usando o axioma 2, temos:

$$A_q = h^2 + b^2 + 2.A_r \quad (2)$$

onde denotamos por A_r a área do retângulo. Desta forma, igualando 1 e 2, temos

$$h^2 + 2.h.b + b^2 = h^2 + b^2 + 2.A_r$$

simplificando temos

$$A_r = h.b$$

De onde concluímos que: *a área do retângulo é produto da medida da sua base pela sua altura.*

Área do Triângulo Retângulo

Um triângulo é dito retângulo quando um de seus ângulos internos é reto. Como calcular a sua área? Vejamos as figuras abaixo:

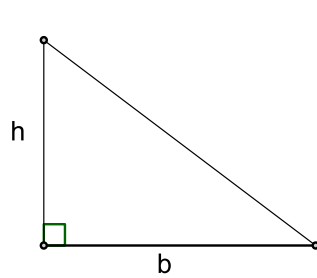


Figura 4

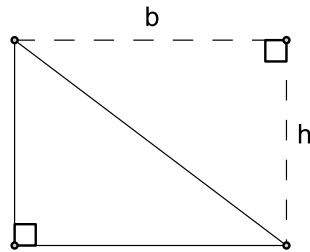


Figura 5

Para calcular a área do triângulo retângulo da figura 4 vamos duplicar nosso triângulo. Observemos a figura 5, que os triângulos são congruentes, os quais formam um retângulo de lados b e h , cuja área conforme visto anteriormente é $A_r = b.h$

Assim como a $A_r = 2.A_t$, onde A_t representa a área do triângulo, obtemos que:

$$A_t = \frac{A_r}{2} = \frac{b.h}{2}$$

ou seja, *área do triângulo retângulo será dada pelo semi-produto de sua base com sua altura.*

Área do Paralelogramo

O paralelogramo é um quadrilátero de lados opostos paralelos.

Agora vamos deduzir a fórmula para calcular a área do paralelogramo. Vejamos a figura:

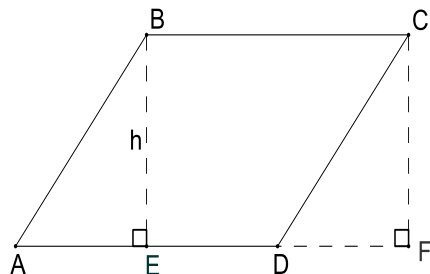


Figura 6

Observe que os triângulos ABE e DCF são congruentes pelo caso lado ângulo lado (LAL). Assim e pelo Axioma 3 (Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais), obtemos que a área do paralelogramo $ABCD$ é igual à área do retângulo $BEFC$, isto é:

Deduzimos que a área do paralelogramo A_p é dada pelo produto da base pela sua altura, ou seja, $A_p = \overline{AD} \cdot h$.

Anteriormente mostramos como calcular a área do triângulo retângulo. E para o caso dos triângulos não serem retângulos, como calcular essas áreas?

Área do Triângulo Acutângulo

Triângulo acutângulo, possui todos os ângulos internos agudos; o ângulo deve ser maior que 0° e menor que 90° . Observe a figura:

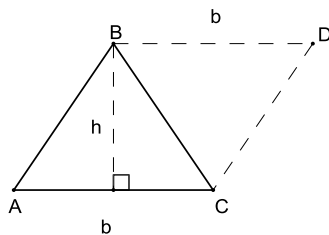


Figura 7

Na figura 7, o triângulo ABC é acutângulo e o triângulo BCD foi obtido fazendo uma simetria do triângulo ABC e colocado em outra posição, conforme vemos; desta forma a figura representa um paralelogramo $ABCD$, cuja área é o dobro do triângulo; como já visto a área do paralelogramo é dado por, $A_p = b.h$, assim, $A_p = 2.A_t$ de onde concluímos que $A_t = \frac{A_p}{2}$, ou ainda, $A_t = \frac{b.h}{2}$.

Área do triângulo obtusângulo

Triângulo obtusângulo possui um ângulo interno maior que 90° e menor que 180° .

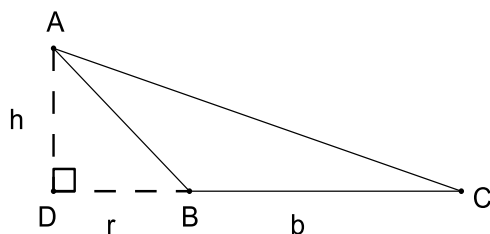


Figura 8

Na figura 8, temos um triângulo obtusângulo ABC , e baixando a altura AD relativa ao lado BC , formamos dois triângulos retângulos o CDA e o BDA . Como vimos anteriormente a área do triângulo ADC é dada por $\frac{h.(r+b)}{2}$. Para obtermos a área do triângulo ABC temos que subtrair a área do triângulo retângulo BDA . Assim,

$$A_t = \frac{(r + b).h}{2} - \frac{r.h}{2},$$

onde simplificando obtemos:

$$A_t = \frac{b.h}{2}.$$

Assim concluímos que para qualquer triângulo sua área é calculada pelo semi-produto da medida de sua base por sua altura.

Área do Trapézio

Em seguida iremos deduzir a fórmula para calcular a área de um trapézio (é um quadrilátero que possui dois lados paralelos, os quais serão chamados de bases).

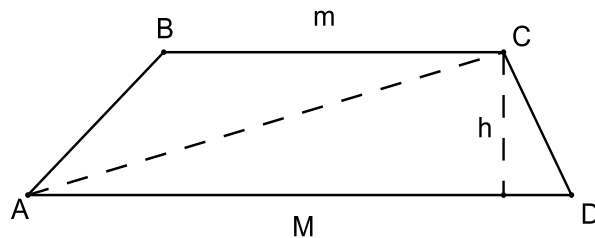


Figura 9

Como calcular a área do trapézio? Observe a figura 9. Notemos que a área do trapézio é dada pela soma das áreas dos triângulos ABC e ACD . Temos que:

$$A_t = \frac{M \cdot h}{2} + \frac{(m \cdot h)}{2} = \frac{(M + m) \cdot h}{2}$$

Assim temos que a fórmula para calcular a área do trapézio é dada pela soma da medida das bases multiplicando pela sua altura e dividindo por dois.

Para finalizarmos o trabalho vamos demonstrar o famoso teorema de Pitágoras com auxílio dos resultados obtidos acima.

Teorema 1 (Teorema de Pitágoras:) *Em um triângulo retângulo a medida da hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Para a demonstração, consideremos um triângulo ABC , retângulo em C e de tal forma que $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. Com esse triângulo, vamos construir um quadrado de lado $a + b$ conforme a figura a seguir.

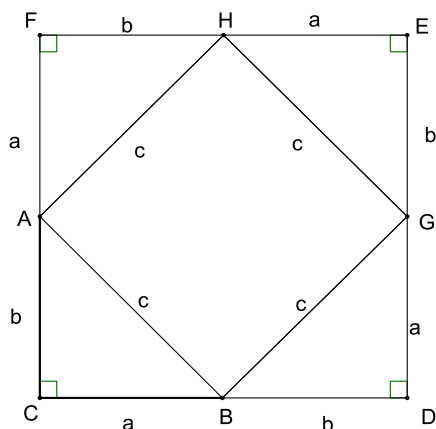


Figura 10

A área do quadrado de lado $a + b$, dada por $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Por outro lado podemos calcular a área do mesmo quadrado pela soma das figuras que o compõe, isto é, $A_q = 4(a.b)/2 + c^2$.

Igualando as duas áreas:

$$a^2 + b^2 + 2.a.b = \frac{4(ab)}{2} + c^2;$$

simplificando, obtemos

$$a^2 + b^2 = c^2$$

o que demonstra o teorema.

Com objetivo de ampliar as possibilidades de análise do conhecimento sobre áreas mostramos que pode ser mais simples o entendimento com auxílio da figura.

Compreender os conceitos e os conteúdos de Matemática, conhecendo o desenvolvimento do assunto. Matemática não é apenas decorar fórmulas, é entender o surgimento, ver o desenvolvimento e sua aplicação de modo a se conceituar pelas normas matemáticas.

Agradecimentos

Agradeço a todos que de uma forma ou outra me deram a oportunidade de estar aqui. Ao meu professor Gilson Tumelero, que me auxiliou no desenvolvimento desse trabalho.

Referências Bibliográficas:

BARBOSA, J. L. M., **Geometria Euclidiana Plana**. 5º ed. Fortaleza: SBM, 1994.161p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação media e tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ministério da Educação/ Secretaria da Educação media e tecnológica, 1999.

GRECCO BELLOTTO, G. M. S., **Matemática para o 2º. Grau**. 3ºed. São Paulo: Ática, 1991.364p.

MOISE, E. E. - DOWS, F. Jr. **Geometria Moderna**, Parte I Editora Universal de Brasília, 1971.

TROTTA, F., NERY, C.,**Matemática Curso Completo**. 1º ed. São Paulo: Moderna, 1985. 448p.

TUMELERO, G. FACHIN. L., **Explorando o Conceito de Áreas no Ensino Fundamental e Médio**. IN: Encontro Regional de Educação Matemática. Anais. Pato Branco 2002.

CÓDIGOS LINEARES: CODIFICAÇÃO E DECODIFICAÇÃO DE CÓDIGOS COM UM ERRO

Maycon Gonçalves Carneiro⁹, Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano¹⁰.

Resumo

Estudado por Matemáticos e Engenheiros, os códigos corretores de erros são extremamente usados na transmissão ou armazenamento de informações. Na prática, a classe de códigos corretores de erros mais usada, é a chamada classe dos códigos lineares. Utilizando linguagens de programação, podemos desenvolver algoritmos que codifiquem e decodifiquem mensagens de forma mais rápida e prática. Este trabalho visa explicar brevemente os processos de codificação e decodificação, dos códigos lineares com apenas um erro, por meio de um exemplo feito em linguagem de programação Pascal. Mostramos assim, uma aplicação prática da matemática aplicada e computacional.

Palavras-chave: Códigos Lineares, codificação, decodificação, pascal.

Introdução

Segundo Hefez(2002), um código corretor de erros é um modo organizado de adicionar-se algum dado à uma mensagem que se queira transmitir ou armazenar, que possibilite, ao recuperar a informação, detectar e corrigir erros, ou seja, diferente de criptografia, onde se introduz o erro, para que não se consiga decifrar a mensagem.

Admitindo que o público alvo do trabalho possua conhecimento das ferramentas algébricas envolvidas com a Teoria e das definições e resultados básicos, passamos então

⁹Projeto desenvolvido no PIBIC com apoio financeiro da Fundação Araucária -

E-mail : mayconadv@gmail.com

¹⁰Professor orientador do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Campus Pato Branco - E-mail : srichardwsb@utfpr.edu.br

à alguns resultados mais específicos para o desenvolvimento do nosso exemplo utilizando Pascal.

Códigos Lineares

Seja $C \subset F^n$ um código linear, define-se $C^\perp = \{v \in F^n : \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in C\}$, onde $\langle v, u \rangle$ denota o produto interno em F^n .

Temos que C^\perp é um subespaço vetorial de F^n , ortogonal a C pois, $x \in C^\perp \Leftrightarrow Gx^t = 0$, onde G é a matriz geradora de C associada a alguma base. Tal subespaço, C^\perp , é também um código linear que será chamado de código dual de C .

Sendo $C \subset F^n$ um código de dimensão k , com matriz geradora $G = (Id_k \mid A_{k \times (n-k)})$, na forma padrão, então $\dim C^\perp = n - k$ e $H = (-A^t \mid Id_{n-k})$ é uma matriz geradora de C^\perp , o que se verifica pois se $v \in C^\perp \Leftrightarrow Gv^t = 0$ então

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & | & a_{3,k+1} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & | & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & | & a_{k,k+1} & \dots & a_{k,n} \end{pmatrix}_{k \times n} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{k \times 1} \quad \text{daí}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} v_{k+1} \\ v_{k+2} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Logo, como F possui q elementos, existem $q^{n-(k+1)+1} = q^{n-k}$ possibilidades para v , ou seja, C^\perp possui q^{n-k} elementos, então sua dimensão é $n - k$.

Temos ainda que H gera um subespaço vetorial de dimensão $n - k$, pois as linhas de H são linearmente independentes devido ao bloco Id_{n-k} . Notemos que, sendo $H_i, 1 \leq i \leq n - k$ é a i -ésima linha de H , $H_i = (-a_{1i}, -a_{2i}, \dots, -a_{ki}, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ e a j -ésima

linha de G , denotada $G_i, 1 \leq i \leq k$, será $G_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{j, n-k})$ então $\langle H_i, G_j \rangle = -a_{ji} + a_{ij} = 0$, ou seja, todas as linhas de H são ortogonais às linhas de G . Assim, o espaço gerado pelas linhas de H está contido em C^\perp , e os dois subespaços têm a mesma dimensão, assim eles coincidem, logo H é uma matriz geradora de C^\perp .

Vemos que se C é um código linear em F^n de dimensão k , então C^\perp é um código de dimensão $n - k$, e que se G é a matriz geradora de C , então H de ordem $(n - k) \times n$ com coeficientes em F e linhas linearmente independentes, é uma matriz geradora de C^\perp se, e somente se, $GH^t = 0$.

Tal matriz, $H = (-A^t \mid Id_{n-k})$, geradora de C^\perp é chamada de matriz teste de paridade.

Assim, dado um código C e H a matriz teste de paridade desse código, para verificarmos se um determinado vetor $v \in F^n$ pertence ou não à C , basta verificar se é nulo o vetor Hv^t . Tal vetor, Hv^t , é chamado de *síndrome* de v .

Vimos portanto, o processo de **codificação** dos códigos lineares. Passemos agora ao processo de **decodificação**. Tal processo consta da detecção e correção de erros de um determinado código.

Primeiramente precisamos definir um vetor erro e , como sendo a diferença entre o vetor recebido v e o vetor transmitido c , isto é $e = v - c$ logo, se obtivermos $Hv^t = 0$, assumindo que no processo de transmissão **apenas** um erro ocorra, e que nosso código possua $d \geq 3$ então, o vetor recebido v pertence ao código, o qual será igual a um único vetor deste. Então $e = (0, 0, \dots, 0)$ e $v = c$. Caso $Hv^t \neq 0$ então, ocorreram erros durante a transmissão, logo teremos um vetor erro $e = v - c$, onde o peso desse vetor e , corresponde ao número de erros cometidos entre a transmissão e a recepção.

Como $Hc^t = 0$, então temos $He^t = H(v^t - c^t) = Hv^t - Hc^t = Hv^t$, assim a palavra recebida e o vetor erro têm mesma síndrome.

O problema então, é como determinar esse vetor erro e a partir de Hv^t . Vejamos a determinação desse vetor e quando $w(e) \leq 1$.

Para tanto, suponhamos que C tenha distância mínima $d \geq 3$, pois como C pode corrigir até $t = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ erros, assim com $d \geq 3$, C corrige pelo menos um erro. Suponhamos ainda que $w(e) \leq 1$, ou seja, o canal introduziu no máximo um erro.

Se $He^t = 0$, então $v \in C$ e tomamos $c = v$.

Suponhamos $He^t \neq 0$, logo $w(e) = 1$ e, portanto o vetor erro e , tem apenas uma coordenada não nula. Consideremos que $e = (0, \dots, 0, \alpha, 0, \dots, 0)$ com $\alpha \neq 0$ na i -ésima posição. Assim, $He^t = \alpha h^i$, onde h^i é a i -ésima coluna de H . Portanto tomamos tal vetor e como sendo o vetor com todas as componentes nulas exceto a i -ésima componente que é α .

Implementação Computacional

Estabelecemos então, o algoritmo de decodificação em códigos corretores de um erro.

Seja H a matriz teste de paridade do código C e seja v um vetor recebido. (Suponha $d \geq 3$).

1. Calcule Hv^t .
2. Se $Hv^t = 0$, aceite v como sendo a palavra transmitida.
3. Se $Hv^t = s^t \neq 0$ compare s^t com as colunas de H .
4. Se existirem i e α tais que $s^t = \alpha h^i$, para $\alpha \in F$, então e é a n -upla com α na posição i e zero nas outras posições. Corrija v pondeo $c = v - e$.
5. Se não existirem i e α tais que $s^t = \alpha h^i$, então mais de um erro foi cometido.

Vejamos agora um exemplo, com a aplicação da codificação e decodificação de um código corretor de um erro, com a ajuda do programa Pascal.

Para isso, considere que tenhamos o seguinte código fonte:

$$\left[\begin{array}{ccccc} A = 10000 & B = 01000 & C = 00100 & D = 00010 & E = 00001 \\ F = 11000 & G = 10100 & H = 10010 & I = 10001 & J = 01100 \\ L = 01010 & M = 01001 & N = 00110 & O = 00101 & P = 00011 \\ Q = 11100 & R = 10110 & S = 10101 & T = 11010 & U = 11001 \\ V = 01110 & X = 00111 & Z = 11110 & \text{ESPAÇO} = 00000 & \end{array} \right]$$

e que queiramos codificar e transmitir a seguinte mensagem: FAFIUUV.

Para isso, considere a matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

geradora de C , a qual possui $d = 3$, assim C pode corrigir um erro.

Se c uma palavra do nosso código fonte, para codificá-la fazemos $c.G$. Para isso, usamos o seguinte programa em linguagem pascal:

```
Program codific;
var a,b,c,i,j,h,k:integer;
g,x,v: array [1..100,1..100] of integer;
Begin
clrscr;
writeln('informe o número de elementos do corpo k = F..');
readln(a);
writeln('informe a dimensão do espaço de saída');
readln(b);
writeln('informe a dimensão do espaço de chegada');
readln(c);
writeln('informe as entradas da matriz de transformação:');
```

```

for i:= 1 to b do
for j:= 1 to c do
Begin
write('Entre com o valor G['i, ', ',j, ' ] : ');
readln(g[i,j]);
End;
for h:=1 to 2 do
begin
writeln("");
writeln('informe o vetor a ser codificado:');
for i:= 1 to b do
begin
write('entre com o valor v['1, ', ',i, ']:');
readln(v[1,i]);
end;
for i:=1 to 1 do
begin
for j:=1 to c do
begin
x[i,j]:=0;
for k:= 1 to b do x[i,j]:=((x[i,j]+v[i,k]*g[k,j])mod a);
write(x[i,j]);
end;
end;
end;
End.

```

Neste programa o usuário informa o corpo a ser trabalhado, a dimensão e o comprimento da matriz G , então o programa pede para o usuário informar a palavra a ser codificada, fazendo então a codificação. Com esse programa podemos codificar qualquer código linear através de uma matriz geradora.

Assim, nossa mensagem codificada será: 010110010 - 110010000 - 010110010 - 111110100 - 011010110 - 001001011.

Agora, suponha que tenhamos recebido a seguinte mensagem: 101010110 - 110010000 - 000011010 - 001100100 - 101000110 - 110010000 - 000011110 - 111110100 - 111000001 - 110010000. Onde no máximo um erro foi introduzido pelo canal.

Para decodificá-la, precisamos encontrar a síndrome da mesma para saber se houve erro ou não, e onde ocorreu o erro. Para isso precisamos primeiramente da matriz teste de paridade de C , ou seja, H que é obtida de G , sendo:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assim, o programa calculará a síndrome do vetor, identificando a presença de erro ou não. Esse programa é “composto” de duas partes, visto que num primeiro momento ele calcula a síndrome de uma palavra de qualquer código linear com apenas um erro. Já na segunda parte, ele foi desenvolvido especificamente para este exemplo, retornando a palavra codificada, visto que no algoritmo de decodificação apenas calcula-se a síndrome e apresenta-se o vetor transmitido sem o erro, mas não a palavra decodificada. Assim, segue o programa específico para este exemplo:

```

Program decodific;
var a,b,c,i,j,h,k:integer;
g,x,v: array [1..100,1..100] of integer;
Begin

```

```

clrscr;
writeln('informe o número de elementos do corpo k = F..');
readln(a);
writeln('informe a dimensão da matriz teste de paridade H:');
readln(b);
writeln('informe o comprimento da matriz teste de paridade H:');
readln(c);
writeln('informe as entradas da matriz teste de paridade H:');
for i:= 1 to b do
for j:= 1 to c do
Begin
write('Entre com o valor G['i, ', ',j, ']: ');
readln(g[i,j]);
End;
for h:=1 to 10 do
begin
writeln("");
writeln('informe o vetor a ser decodificado:');
for j:= 1 to c do
begin
write('entre com o valor vt['i,1, ', ',j, ']:');
readln(v[1,j]);
end;
write('a síndrome é:');
for i:=1 to 1 do
begin
for j:=1 to b do

```

```

begin
x[i,j]:=0;
for k:= 1 to c do x[i,j]:=((x[i,j]+v[i,k]*g[j,k])mod a);
write(x[i,j]);
end;
end;
if ((x[1,1]=0) and (x[1,2]=0) and (x[1,3]=0) and (x[1,4]=0)) or
((x[1,1]=1) and (x[1,2]=1) and (x[1,3]=1) and (x[1,4]=1)) or
((x[1,1]=1) and (x[1,2]=0) and (x[1,3]=1) and (x[1,4]=1)) or
((x[1,1]=0) and (x[1,2]=1) and (x[1,3]=1) and (x[1,4]=1)) or
((x[1,1]=1) and (x[1,2]=1) and (x[1,3]=0) and (x[1,4]=1)) then
begin
writeln(' e a palavra enviada foi: ',v[1,5],v[1,8],v[1,9],v[1,6],v[1,7],'.');
end;
if (x[1,1]=1) and (x[1,2]=0) and (x[1,3]=1) and (x[1,4]=0)then
begin
writeln(' e a palavra enviada foi: ',(((v[1,5])+1)mod 2),v[1,8],v[1,9],v[1,6],v[1,7],'.');
end;
if (x[1,1]=1) and (x[1,2]=0) and (x[1,3]=0) and (x[1,4]=0)then
begin
writeln(' e a palavra enviada foi: ',v[1,5],v[1,8],v[1,9],(((v[1,6])+1)mod 2),v[1,7],'.');
end;
if (x[1,1]=0) and (x[1,2]=1) and (x[1,3]=0) and (x[1,4]=0)then
begin
writeln(' e a palavra enviada foi: ',v[1,5],v[1,8],v[1,9],v[1,6],(((v[1,7])+1)mod 2),'.');
end;
if (x[1,1]=0) and (x[1,2]=0) and (x[1,3]=1) and (x[1,4]=0)then

```

```

begin
writeln(' e a palavra enviada foi: ',v[1,5],(((v[1,8])+1)mod 2),v[1,9],v[1,6],v[1,7],'.');
end;
if (x[1,1]=0) and (x[1,2]=0) and (x[1,3]=0) and (x[1,4]=1)then
begin
writeln(' e a palavra enviada foi: ',v[1,5],v[1,8],(((v[1,9])+1)mod 2),v[1,6],v[1,7],'.');
end; if ((x[1,1]=1) and (x[1,2]=1) and (x[1,3]=1) and (x[1,4]=0)) or
((x[1,1]=0) and (x[1,2]=1) and (x[1,3]=0) and (x[1,4]=1)) or
((x[1,1]=0) and (x[1,2]=1) and (x[1,3]=1) and (x[1,4]=0)) or
((x[1,1]=0) and (x[1,2]=0) and (x[1,3]=1) and (x[1,4]=1)) or
((x[1,1]=1) and (x[1,2]=1) and (x[1,3]=0) and (x[1,4]=0)) or
((x[1,1]=1) and (x[1,2]=0) and (x[1,3]=0) and (x[1,4]=1)) then
begin
writeln(' foi cometido mais que um erro.');
```

end;

end;

End.

Assim ao passarmos nossa mensagem recebida pelo programa o mesmo nos retorna as seguintes informações:

```

101010110- a síndrome é:1010 e a palavra enviada foi:01001
110010000- a síndrome é:0000 e a palavra enviada foi:10000
000011010- a síndrome é:0000 e a palavra enviada foi:11010
001100100- a síndrome é:0000 e a palavra enviada foi:00001
101000110- a síndrome é:0000 e a palavra enviada foi:01001
110010000- a síndrome é:0000 e a palavra enviada foi:10000
000011110- a síndrome é:0100 e a palavra enviada foi:11010
111110100- a síndrome é:0000 e a palavra enviada foi:10001
```

111000001- a síndrome é:0000 e a palavra enviada foi:00100

110010000- a síndrome é:0000 e a palavra enviada foi:10000.

Logo, notamos que ocorreram erros na transmissão da primeira e da sétima palavra, cujas síndromes foram diferentes de 0 então o programa corrigiu o erro e nos retornou a palavra correta que foi enviada.

Estes são exemplos simples que nos mostram a grande utilidade da matemática aplicada e computacional, para resolvermos problemas com mais facilidade. Como foi mencionado, esse programa possuiu uma segunda parte específica para esse problema, retornando as síndromes bem como as palavras corretas, mas o mesmo pode ser alterado conforme o problema proposto.

Agradecimentos

Agradecemos ao Professor Carlos A. Ribeiro Martins e aos colegas do grupo de iniciação científica pela colaboração no desenvolvimento do presente trabalho.

Referências Bibliográficas:

HEFEZ, A., VILLELA, M.L.T.: **Códigos Corretores de Erros**: Serie Computação e Matemática. IMPA: Rio de Janeiro. 2002.

HEFEZ, A.: **Curso de Álgebra**: Coleção Matemática Universitária. IMPA: Rio de Janeiro, vol.1, 2ed.,1993.

SILVA, J.G.Filho: **Informação, Codificação e Segurança de Dados**, Universidade de Brasília. Disponível em: <http://www.ene.unb.br/juliana/cursos/teoriainf/codsec07.pdf> Acesso em: 02 mai. 2008.

SOUZA, A.O.;CÂMARA, M.A.: **Códigos Corretores de Erros Lineares**, Mono-

grafia. Uberlândia, 2006. 36p. Especialização (Matemática) - Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia - (UFU).

CARROL, D.W.: **Progromação em Turbo Pascal**. McGraw-Hill: São Paulo, 1988.

MATEMÁTICA APLICADA E MODELOS MATEMÁTICOS

Jefferson César dos Santos¹¹, Gilson Tumelero¹².

Resumo

Classificamos a matemática hoje em diversas áreas, mas as que mais ouvimos são a “matemática pura”, “matemática aplicada” e a “educação matemática”. Se nos reportarmos no tempo iremos perceber que qualquer conceito matemático era desenvolvido para solucionar algum problema de ordem prática. Neste trabalho apresentamos o uso de alguns destes conceitos matemáticos na interpretação de tais problemas.

Palavras-chave: Derivadas, equações, interpretação geométrica.

Introdução

O desenvolvimento da matemática, sempre esteve e está intimamente ligada a resolução e interpretações de situações cotidianas, que geralmente são interpretações de fenômenos físicos.

Pesquisas em matemática sempre estão voltadas a resolver tais problemas ou melhorar formas já existentes para resolvê-los.

A modelagem matemática é utilizada em diversas áreas, como por exemplo: proliferação de doenças bovinas, produção de matérias para construção civil, estratégias de pesca, efeitos biológicos de radiações, doenças infecciosas, movimentação de animais, movimento de rios, estratégias de vacinação, teoria da decisão, identificação de sistemas,

¹¹Aluno de graduação de Licenciatura em Matemática da Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras - FAFI - União da Vitória

¹²Professor orientador do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras - FAFI - União da Vitória - E-mail : tumeleromat@yahoo.com.br

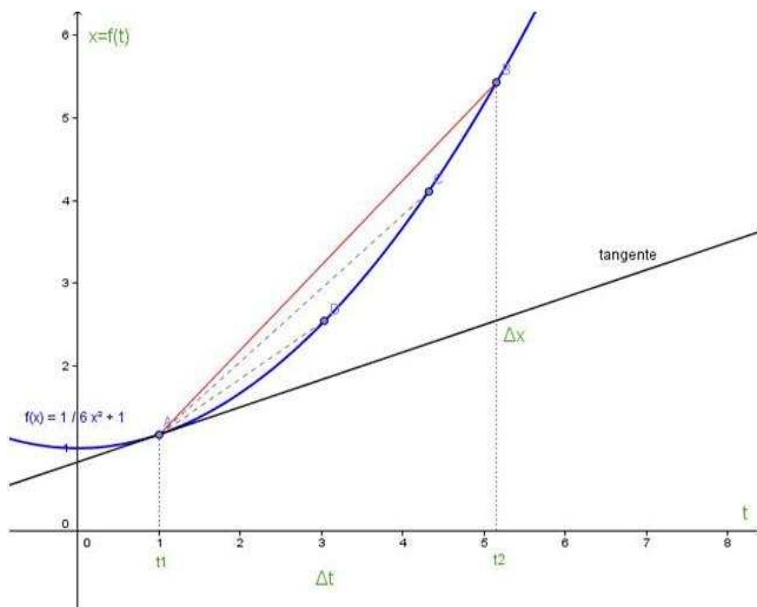
crescimento de cidades, tráfego urbano, armazenamento e secagem de grãos, controle biológico de pragas, extração de óleos vegetais, meios reagentes ionizados, entre outros.

A modelagem matemática é o processo de representação de determinado objeto ou sistema real através de correlações matemáticas visando a aplicação na prática.

Neste trabalho faremos uma interpretação geométrica da derivada e algumas aplicações da mesma, e também faremos uns exemplos mostrando concretamente a sua aplicação e importância.

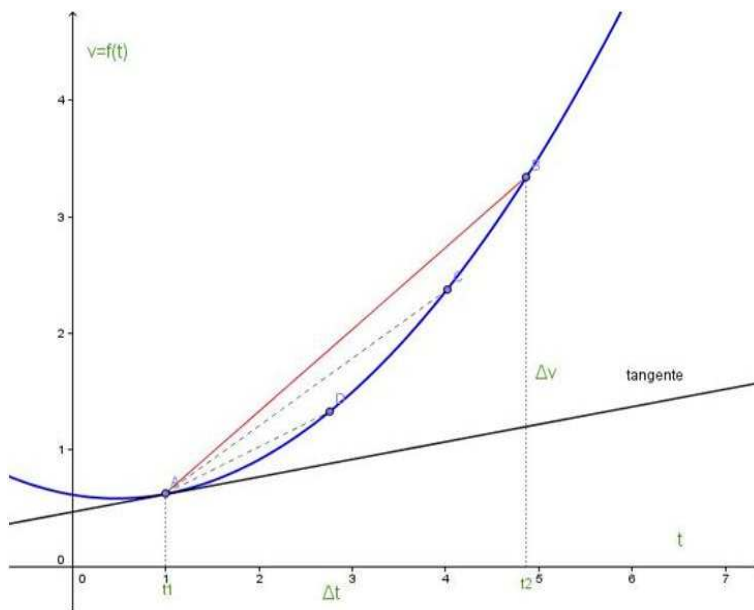
Interpretação e Uso da Derivada

Iniciaremos mostrando uma forma de como é usado o conceito de derivada em física. Para isto, seja $x(t)$ uma função horária do espaço, aonde podemos observar a posição de uma partícula em um tempo qualquer. Temos que a derivada de uma função em um ponto c , nos fornece o coeficiente angular ($\tan \alpha$) da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(c, x(c))$ no sentido positivo do eixo das abscissas, isto é, $\tan \alpha = x'(c)$ mas por outro lado $\tan \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, logo $x'(c) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Conforme exemplo no gráfico:



Lembrando que a variação do deslocamento (Δx) em um certo tempo (Δt) é a velocidade média de uma partícula. Disto concluímos que a derivada de uma função horária do espaço, resulta na velocidade em função do tempo. Isto é $x'(t)$ é a velocidade da partícula no instante t .

Analogamente, seja $x'(t)$ uma função horária da velocidade, aonde podemos observar a velocidade de uma partícula em um tempo qualquer t . Temos que a derivada de uma função em um ponto c , nos fornece o coeficiente angular ($\tan \alpha$) da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(c, x'(c))$ em relação ao sentido positivo do eixo das abscissas, isto é, $\tan \alpha = x''(c)$ mas por outro lado $\tan \alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, logo $x''(c) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$. Conforme exemplo no gráfico:



Lembrando que a variação da velocidade (Δv) em um certo tempo (Δt) é a aceleração média de uma partícula. Disto concluímos que a derivada de uma função de velocidade em função do tempo, resulta na aceleração em função do tempo. Isto é $x''(t)$ é a aceleração da partícula no instante t .

Com a observação destes dois gráficos concluímos que a derivada da função posição em relação ao tempo no ponto c , nos dá a velocidade instantânea da partícula no mesmo

ponto, e analogamente a derivada da função velocidade em relação ao tempo no ponto c , nos dá a aceleração instantânea da partícula neste ponto, disto concluímos matematicamente que, sendo uma função $x(t)$, a função horária do espaço, $x'(t)$ é uma função horária da velocidade e $x''(t)$ é a função horária da aceleração.

Vamos modelar matematicamente a queda de um corpo, quando desprezamos a resistência do ar. Isto é o corpo cairá pela ação única da força gravitacional. Para poder encontrar as equações matemáticas, primeiro é necessário conhecer alguns princípios físicos que se aplicam no problema. Este princípio é conhecido como a Segunda lei de Newton ($F = m.a$), que diz que: “A soma total das forças externas atuando sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo, pela aceleração com que está se movimentando”.

Denotemos por y a função que define a posição do corpo em cada instante de tempo, denotemos por m a massa do corpo, e por g a aceleração da força da gravidade. Como não existe outra força que perturbe a queda do corpo, então a força resultante será igual ao peso do corpo. Pela segunda lei de Newton o peso deve ser igual à massa do corpo vezes a aceleração com que o corpo está caindo. Como a posição do corpo é dada por y , então a velocidade será y' e a aceleração y'' .

Concluímos que y deve satisfazer

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

A equação acima é chamada de equação diferencial de segunda ordem. Isto é, uma equação onde a incógnita é y e envolve derivadas de segunda ordem. Este problema pode ser resolvido de forma simples integrando sucessivamente. Integrando sucessivamente encontramos que y deve satisfazer

$$\frac{dy}{dt} = gt + c_1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2,$$

onde c_1 e c_2 são constantes determinadas pelas condições do problema. Assim por exemplo se o corpo está inicialmente ($t = 0$) numa altura h , e parte com uma velocidade

inicial v_0 então teremos que y deve satisfazer

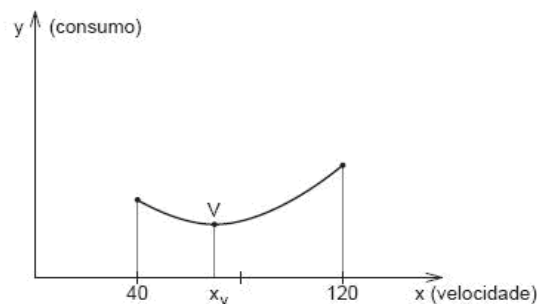
$$y(0) = h, \quad y'(0) = v_0.$$

Substituindo estes valores na função y encontramos $c_2 = h$, $c_1 = v_0$. Portanto a posição do corpo em cada instante de tempo estará dada por

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h.$$

Outro exemplo em que podemos usar o conceito de derivada é o seguinte:

Calcular qual seria a melhor velocidade de um carro para que o gasto de combustível seja o mínimo possível. Vamos observar um automóvel em um intervalo de 40 a 120km/h, que segue a função $y = 0,005x^2 - 0,6x + 26$, onde x é a velocidade em quilômetros por hora e y é o número de litros de gasolina gastos para percorrer 100km.



Temos no ensino médio a fórmula para calcular x_v que é dado por; $x_v = -\frac{b}{2a}$, podemos então calcular a velocidade em que o consumo será o menor possível encontrando x_v .

$$\text{Logo, } x_v = \frac{0,6}{2 \cdot 0,005} = \frac{0,6}{0,010} = 60 \text{ km/h.}$$

Ponto crítico de uma função derivável f é um ponto $x = c$ do domínio de f no qual $f'(c) = 0$, ou seja, graficamente pode ser o ponto de máximo ou de mínimo de uma função, onde $\tan \alpha = 0$. Baseando-se na derivada, podemos resolver o exemplo anterior, onde $f'(x) = 0$

$$0,010x - 0,6 = 0 \Rightarrow 0,010x = 0,6 \Rightarrow x = 60.$$

Para concluir o exemplo, vamos encontrar a fórmula $x_v = -\frac{b}{2a}$, baseando-se na derivada. Seja uma função $ax^2 + bx + c$, temos que a derivada desta função é $2ax + b$, se igualarmos a derivada da função a zero, teremos $2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a}$.

Cronologia do Carbono

Meia-vida é uma medida de estabilidade de uma substância radioativa. A meia-vida é simplesmente o tempo gasto para metade dos átomos de uma quantidade inicial A_0 se desintegrar ou se transmutar em átomos de outro elemento. Onde a quantidade de substância no instante t , é proporcional a quantidade inicial de substância. Denotando por $A(t)$ a quantidade de substância no instante t . A solução para o problema de valor inicial é:

$$\frac{dA}{dt} = kA, \quad A(0) = A_0$$
$$A(t) = A_0 e^{kt}.$$

Por volta de 1950, o químico Willard Libby inventou um método para determinar a idade de fósseis usando o carbono radioativo. A teoria da cronologia do carbono. A razão entre a quantidade de C-14 para carbono ordinário na atmosfera parece ser uma constante e, como consequência, a proporção da quantidade de isótopo presente em todos os organismos vivos é a mesma proporção da quantidade na atmosfera. Quando um organismo morre, a absorção de C-14, através da respiração ou alimentação, cessa. Logo, comparando a quantidade proporcional de C-14 presente, digamos, em um fóssil com a razão constante encontrada na atmosfera, é possível obter uma razoável estimativa da idade do fóssil. O método se baseia no conhecimento da meia-vida do carbono radioativo C-14, cerca de 5600 anos.

Exemplo 1 *Um osso fossilizado contém 1/1000 da quantidade original do C-14. Determine a idade do fóssil.*

Solução: O ponto de início é novamente $A(t) = A_0 e^{kt}$. Para determinar o valor de k , usamos o fato de que $\frac{A_0}{2} = A(5600)$, ou $\frac{A_0}{2} = A_0 e^{5600k}$. Temos então

$$5600t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$k = -\frac{\ln 2}{5600} = -0,00012378.$$

Logo, $A(t) = \frac{A_0}{1000}$, temos

$$\frac{A_0}{1000} = \ln\left(\frac{1}{1000}\right) = -\ln 1000$$

$$t = \frac{\ln 1000}{0,00012378} = 55800 \text{ anos.}$$

Verificamos com este trabalho um pouco das aplicações de derivadas, onde podemos observar aplicações cotidianas para o uso dos modelos matemáticos. Verificamos no primeiro exemplo o uso da derivada na física, com a modelagem, a partir da segunda lei de Newton, conseguimos encontrar a fórmula da posição, uma fórmula muito utilizada na física. E no último exemplo utilizamos a integral para calcular a idade de um fóssil.

Com este trabalho observamos a importância da matemática aplicada, e a aplicação da mesma em outras áreas do conhecimento, como a Física e a Química.

Referências Bibliográficas:

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução de Valéria e Magalhães Iório. LTC: Rio de Janeiro, 2006.

GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo**. Volume 1. 2ª Ed. LTC: Rio de Janeiro, 1987.

HALLIDAY, D. **Fundamentos da Física: Mecânica**; volume 1. Tradução Flavio

Menezes de Aguiar e Wellington Rocha Tabosa. LTC: Rio de Janeiro, 2006.

HOFFMANN, L.D; BRADLEY, G.L. **Cálculo: Um Curso Moderno e Suas Aplicações**. 7ª Ed. LTC: Rio de Janeiro, 2002.

RIVERA, J.E.M. **Cálculo Diferencial e Integral I**. Textos de Graduação. Rio de Janeiro, 2007.

RIVERA, J.E.M. **Cálculo Diferencial II & Equações Diferenciais**. Textos de Graduação. Rio de Janeiro-2007.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais**. Volume 1. Tradução Antonio Zumpano, Revisão técnica Antonio Pertence Jr. Makron Books: São Paulo, 2001.

MODELAGEM MATEMÁTICA: APONTANDO CAMINHOS REAIS PARA ENSINO E APRENDIZAGEM

Simone Raquel Casarin Machado ¹³

Resumo

A dificuldade de aprendizagem apresentada por alguns educandos da disciplina de Fundamentos da Matemática I, do curso de Gerência de Obras da UTFPR - Pato Branco / PR, salientou a necessidade de (re) pensar um ensino de matemática mais interessante e significativo. Sob a perspectiva da Modelagem Matemática, desenvolveu-se uma proposta de ensino voltada para o cotidiano dos educandos, a partir dos interesses reais dos mesmos. O tema escolhido foi à construção civil, abordando-se assim os diversos aspectos da temática. Objetivando o desenvolvimento pleno dos educandos, na tentativa de sanar das dificuldades de aprendizagem, enfocaram-se as mudanças experienciadas em sala de aula, buscando relacionar a Modelagem Matemática com o desenvolvimento de uma postura reflexiva.

Palavras-chave: Modelagem matemática; educação.

Para Início de Conversa...

Este trabalho¹⁴ originou-se a partir da minha própria prática docente, enquanto educadora, permeado constantemente por angústias, inquietações e desassossegos em torno desta. Apresento aqui, o relato de uma experiência ocorrida no 2º semestre de 2006, na disciplina de Fundamentos da Matemática I, no curso de Gerência de Obras da UTFPR.¹⁵ Nesse período, a disciplina foi trabalhada, mediante o uso da Modelagem Matemática (MM)¹⁶ pelos educandos.

¹³Universidade Federal de Santa Catarina - E - mail:akalahaya@gmail.com

¹⁴Este trabalho possui apoio financeiro da CAPES.

¹⁵Universidade Tecnológica Federal do Paraná, antigo CEFET (Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná), campus Pato Branco.

¹⁶Para evitar repetições deixarei de escrever o termo Modelagem Matemática para a abreviatura MM.

Tendo em vista a dificuldade apresentada pelos educandos da disciplina dos semestres anteriores, no que tange o conhecimento matemático, bem como o desafio que se apresentava para mim enquanto educadora e responsável pela disciplina, na tentativa de amenizar esta problemática, propôs-se que os conteúdos desenvolvidos ao longo da disciplina, fizessem parte do cotidiano dos educandos.

[...] porque, partindo de problemas reais que conferem utilidade à matemática já; aprendida, podemos ir além da resolução de exercícios repetitivos que não dizem nada para o aluno quanto a utilidade do “que” e do “para que” fazem, e, significado, porque estarão relacionados a linguagem simbólica própria da matemática com a linguagem textual de uma situação real problematizada, que prescinde da compreensão dos objetos matemáticos. (CHAVES, 2000, p.27).

Neste sentido, a MM veio ao encontro dos nossos anseios, pois a partir de temas diretamente relacionados aos interesses dos educandos, ligados a prática cotidiana dos mesmos, foi possível sistematizar os conhecimentos matemáticos. A construção destes conhecimentos, à luz da concepção sócio-interacionista¹⁷ de ensino, levou-nos a considerar toda a bagagem anterior dos educandos. Este arsenal de conhecimentos prévios possibilitou um aprendizado dinâmico e significativo. Esta concepção de ciência aqui apresentada cuja construção do conhecimento é guiada pelas atividades humanas determinadas sócio-historicamente acena para a existência de um conjunto de práticas e teorias deveras complexo, concebidas culturalmente.

É consensual e inquestionável que o educador precisa dominar as teorias científicas para um adequado desempenho da prática docente. Mas esta condição embora necessária, não é suficiente para garantir uma aprendizagem desejável. Em sintonia com a perspectiva adotada, propondo encaminhamentos um tanto quanto desafiadores, fez-se necessário

¹⁷Ler “Vygotsky: uma síntese” (1996) onde se analisa a teoria histórico-cultural de Vygotsky, e em particular suas descobertas etnográficas.

que os educandos demonstrassem interesse e comprometimento com a proposta da MM, para que pudéssemos elaborar um planejamento que contemplasse suas expectativas.

[...] O fator decisivo do planejamento é a percepção por parte do sujeito da necessidade de mudar. É claro que se tudo vai bem, se nada há para se modificar na escola, para quê introduzir esse tal de “plano”?(...) O ponto de partida é uma pergunta básica: há algo em nossa prática que precisa ser modificado, transformado, aperfeiçoado? Se não há, não se precisa de projeto. (VASCONCELOS, Celso, 1995, p.36).

A ação de planejar, portanto, não se reduz ao simples preenchimento de formulários para controle administrativo; é, antes, a atividade consciente de previsão das ações docentes, fundamentadas em opções político-pedagógicas (LIBÂNEO, 1994, p.222).

A postura crítica do educador diante da necessidade de um planejamento, leva-o a superar a visão ingênua e simplista, de que existe uma dicotomia entre teoria e prática. O processo de mudança das concepções oriundas do senso comum pedagógico ocorre no momento em que se busca dar significado aos conhecimentos construídos partindo da realidade dos sujeitos envolvidos no processo.

É comum, porém, evidenciar nas falas dos educandos, um sentimento controverso em torno da disciplina de matemática. Ao mesmo tempo em que defendem a importância da inserção da matemática na grade do curso, por ser uma ferramenta essencial ao longo do desenvolvimento profissional destes, observa-se ao mesmo tempo certo desânimo e descontentamento. De fato, a matemática ensinada nas escolas, não contagia nossos educandos, pois se apresentam de forma desinteressante, inútil, obsoleta e descontextualizada.

A matemática, nessa perspectiva, restringe-se meramente ao repasse de informações, focalizado principalmente no treinamento de algoritmos e regras. É a matemática pela

matemática, onde os conteúdos esvaziados de sentidos, se apresentam de forma pronta e acabada, conferindo-lhe uma linearidade inexistente. Sabota-se o processo, impedindo os educandos de construírem seu próprio conhecimento.

Nunca é demais destacar que o aluno constrói seu próprio conhecimento, jamais o recebe pronto do professor, salvo em ações mecânicas onde esses conhecimentos jamais ajudarão construir outros; seu professor na verdade o ajuda nessa tarefa de construção (ANTUNES, 2002, p.22).

Cabe ao educador, explorar todas as potencialidades de ensino, contribuindo para que ocorra a construção de conhecimentos que façam sentido para seus educandos. As idéias que os educandos possuem da matemática, desenvolvida de forma mecânica e exageradamente algorítmica, podem se constituir em entraves à sua aprendizagem. A simples menção da palavra “matemática” já é, por si, desencadeadora, provocando reações extremas.

Não queremos minimizar este panorama desolador, no tocante ao conhecimento matemático dos educandos, atribuindo aos educadores, ou mesmo ao sistema de ensino toda a culpa. No entanto, considero que o modelo de ensino deve estar respaldado em conhecimentos que possibilitem o pleno desenvolvimento das capacidades dos educandos.

A importância da MM é indicada para que os educandos encarem a disciplina de forma agradável, conforme Bassanezi (2002, p.16):

Sua importância deve residir no fato de poder ser tão agradável quanto interessante. Nessa nova forma de encarar a matemática, a Modelagem - que pode ser tomada tanto como um método científico de pesquisa quanto como uma estratégia de ensino-aprendizagem - tem se mostrado muito eficaz (idem, p.16).

Para enfrentar a crise deste modelo de ensino que apresenta a matemática totalmente desprovida de sentido para o educando. O modelo tradicional e atual de ensino

a que me refiro, é resultante de um ensino propedêutico e fragmentado, que nada contribui para o desenvolvimento pleno dos educandos. A matemática atual toma novos contornos, quando parte da realidade e do contexto em que é ensinada.

Por que não discutir com os alunos a realidade concreta a que se deva associar a disciplina cujo conteúdo se ensina (...) Por que não estabelecer uma necessária "intimidade" entre os saberes curriculares fundamentais aos alunos e a experiência social que eles têm como indivíduos? (FREIRE, 1996, p.33).

A experiência de aprendizagem que notamos no ensino tradicional, não considera as experiências sociais dos seus educandos, tampouco se preocupa em oferecer uma matemática menos formal e utilitarista.

Desta forma, quando a Modelagem Matemática é trazida para a sala de aula, devemos sempre considerar as múltiplas facetas envolvidas: Perfil dos educandos, disponibilidade dos educadores, entre outras. "Para aprender, os estudantes, por sua vez, precisam assumir a tarefa de reconstrução matemática como um projeto pessoal." (SADOVSKY, 2007, p.55).

Após uma breve abordagem com os educandos, estabeleceu-se o encaminhamento que seria dado à disciplina. Em um primeiro momento, foram explicitados alguns temas que seriam abordados. O conteúdo matemático previsto pela disciplina, envolvia o estudo de funções e noções de limite. Nossa pretensão era trabalhar "determinados conceitos", sob a perspectiva da MM. Por esta razão, nem todos os conteúdos foram abordados, em detrimento do tempo hábil.

A postura adotada, foi a de não dar ênfase somente aos conteúdos matemáticos que, embora fosse útil, nem sempre possibilita a compreensão da realidade. Como aborda SADOVSKY (2007, p.30) "o fato de expressar uma realidade usando uma teoria coloca o estudante numa perspectiva de maior generalidade, o que lhe permite estimar o valor e o potencial do conhecimento". Nem tampouco nos preocupamos apenas em reproduzir os

conteúdos do currículo. Esse conhecimento deveria advir da interação entre o educador, educando e a realidade dos mesmos.

É nessas circunstâncias, desatrelando a aprendizagem matemática as amarras de definições de conteúdos obsoleto, muitas vezes colocado no currículo para atender a determinadas correntes de pensamento, que acredito na eficácia da Modelagem Matemática (Caldeira, 2004, p.5).

A Experiência com a Modelagem Matemática

A experiência foi realizada com um grupo de 20 educandos do primeiro período do curso de Gerência de Obras da UTFPR-Pato Branco, onde a dificuldade de aprendizagem de conteúdos que envolvessem o conhecimento matemático apresentada pelos educandos, levou-nos a (re) pensar o processo de ensino e aprendizagem ligado ao contexto sócio-cultural em que a disciplina estava inserida.

O início do trabalho foi predominantemente teórico, envolvendo os educandos nas leituras e reflexões em torno das concepções e diferentes perspectivas da Modelagem Matemática. Alguns pontos foram levantados durante esse primeiro momento, para que pudéssemos estabelecer a questão que nortearia nosso trabalho: Verificar se o uso da MM, onde os educandos pudessem eleger temas de seu próprio interesse, provocaria melhorias no processo de ensino e aprendizagem?

Para o desenvolvimento desta proposta, foram seguidas as etapas sugeridas por BURAK, conforme citado anteriormente.

Na *escolha do tema*, que se deu neste primeiro momento, propus aos educandos alguns temas que não necessariamente estivessem ligados com os conteúdos ou mesmo com a disciplina de matemática. Nesse momento, os educandos foram incentivados a proporem também, temas de seu próprio interesse, no caso, ligado as atividades de construção civil.

Nesta fase preliminar, ocorre o envolvimento dos educandos com o tema a ser

estudado e investigado. Para tornar o problema mais claro, é feito o delineamento da situação.

Os educandos foram divididos em quatro grupos de cinco integrantes cada, os grupos seriam responsáveis pelo desenvolvimento do processo, tendo na figura do educador, um mediador do conhecimento a ser apreendido. Assim, cada grupo escolheu um tema para explorar, compreender, explicar e investigar determinados aspectos específicos relacionados ao tema. Inicialmente a proposta pareceu um pouco vaga, pois não sabíamos ao certo qual faceta do tema, poderíamos explorar. Somente, depois de algumas discussões, chegou-se a conclusão de que os temas escolhidos deveriam estar dentro de um contexto maior, o da construção civil, conforme salientado anteriormente.

Após a escolha do tema, partimos para a pesquisa de campo, onde procuramos levantar os dados que considerávamos relevantes para a pesquisa. Esta etapa é conhecida como *pesquisa exploratória* que deve propiciar aos educandos o desenvolvimento de uma postura investigativa.

Neste momento, o trabalho de ação exploratória através da MM, teve início com a ida dos educandos aos locais, onde seria coletado informações suficientemente relevantes, para solução do problema inicialmente levantado. Os grupos realizaram visitas aos ambientes e locais de interesse. Após as visitas, em posse dos dados fornecidos, os grupos se reuniam para discutir e analisar os dados obtidos. Com auxílio do educador, percebeu-se que alguns aspectos não foram levantados, nem considerados durante a etapa, e que deveriam ser levados em consideração pela plausibilidade. Este tipo de investigação de cunho qualitativo, citados por LÜDKE e ANDRÉ (1986), mais adequado com os propósitos deste trabalho.

Em um terceiro momento, diversos problemas foram levantados pelos educandos a partir do tema e dos dados coletados durante a fase da *pesquisa exploratória*, a tentativa foi de organizar as dúvidas e questionamentos de modo claro e coerente de forma que venha a facilitar a resolução do problema. Esta etapa é conhecida como *levantamento*

dos problemas.

Muito diferente do que costumamos encontrar nos livros didáticos atuais, que são problemas de algoritmos, problemas de reconhecimento e problemas padrão, conforme a classificação sugerida por DANTE (2007), na perspectiva da MM, os problemas caracterizam-se por seu aspecto contextualizador.

A oportunidade de usar os conceitos matemáticos no seu dia-a-dia favorece o desenvolvimento de uma atitude positiva do aluno em relação à matemática. Não basta saber fazer mecanicamente as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. É preciso saber como e quando usa-las convenientemente na resolução de situações-problema. DANTE (2007, p.13).

O quarto momento, da *resolução dos problemas*, ocorreu concomitantemente à etapa anterior, pois na medida em que os problemas eram levantados pelos educandos, sentiu-se a necessidade do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos e modelos matemáticos para a resolução dos problemas. Nesta etapa que ocorre de fato a MM, através da construção de modelo(s) matemático(s). De acordo com DANTE (2007) resolução de um determinado problema não é única, existindo assim, várias maneiras de resolver um mesmo problema.

Finalmente, para a conclusão após desenvolverem um modelo que desse conta da resolução dos problemas propostos, encaminhou-se para o processo de validação do modelo, ou seja, a análise crítica, a reflexão e a coerência do mesmo.

Para conclusão e utilização do modelo obtido, é feito o teste ou a validação do mesmo, verificando assim, até que ponto ele se aproxima da situação problema.

Notou-se que alguns dos problemas inicialmente propostos não foram realmente solucionados. Ou mudava-se o problema, o que considero uma atitude errônea, tendo em vista que ao tomar esta atitude, estaríamos adequando o problema a uma resposta já encontrada, ou retornava-se à etapa de resolução do problema, que considero mais conveniente diante da postura crítica que tenho assumido enquanto educadora.

Ao trabalhar com a perspectiva da MM, o fazer matemático ensinado aos educandos, os instrumentaliza a enfrentar situações novas em seu cotidiano, desenvolvendo neles a iniciativa, a criatividade e seu autocontrole para encarar com naturalidade os problemas que se apresentarem ao longo da vida, sejam eles de origem matemática ou não. Uma outra vantagem da MM, através da exploração e investigação, que ao resolver problemas, o educando reconhece a realidade na matemática, isto é, não estaremos só trabalhando mecanicamente e de forma descontextualizada com algoritmos, estaremos aplicando conceitos matemáticos em situações do dia-a-dia.

Buscou-se assim, através dos pressupostos construtivistas, abarcar os conhecimentos matemáticos, que deveriam ser trabalhados ao longo da disciplina de Fundamentos da Matemática I. Desta forma, os conteúdos desenvolvidos, não seguiram a rigidez do Plano de Ensino da disciplina. Os conceitos matemáticos foram trabalhados, na medida em que se faziam imprescindíveis.

Notou-se que os educandos demonstravam um maior interesse pelas atividades que vinham desenvolvendo. Esta motivação estava relacionada ao fato de que os mesmos se sentiam agentes do próprio processo de construção do conhecimento e de que a aprendizagem se deu de forma significativa, pois os problemas abarcavam o cotidiano dos mesmos.

Dentro desta perspectiva, viabilizou-se o envolvimento dos educandos, que foram levados a investigar situações originadas na realidade, não apenas com a preocupação de problematizar, mas questioná-las, discutí-las e enfim, tirar suas próprias conclusões. Como sugere os PCNs do Ensino Médio:

Identificar o problema; procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; formular hipóteses e prever resultados selecionar estratégias de resolução de problemas; fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades” (p. 259).

São características da Resolução de problemas e da MM que estão imbricada nas

sugestões postas nos documentos oficiais como uma das competências a serem desenvolvidas no Ensino Médio.

Considerações Finais

Buscou-se neste artigo, compartilhar uma experiência realizada na disciplina de Fundamentos da Matemática I, com uma turma do 1º período do curso de Gerência de Obras, levando em considerações as dificuldades apresentadas pelos educandos das turmas precedentes, no que concerne o conhecimento matemático.

Os conteúdos trabalhados foram mediados pela Modelagem Matemática, enquanto sistema de aprendizagens. Enfatizamos a necessidade de uma postura reflexiva e da existência de um interesse pelo uso da Modelagem Matemática no ensino. Mostramos as possibilidades oferecidas através da perspectiva da Modelagem Matemática em sala de aula, na medida em que a construção do conhecimento parte de temas escolhidos pelos próprios educandos.

Ao aproximar a matemática do cotidiano, percebe-se um resultado satisfatório no que se refere a aprendizagem do educando. Debates em grupo, discussões, investigações, levantamento de hipóteses, visando a criação de problemas aplicados no dia-a-dia. Esta mudança de percepção, que leve a criticidade do processo, deve acontecer constantemente nos espaços de sala de aula, pois, assim, a formação tanto do educando, quanto do profissional a frente do processo, será mais completa.

Assim, o ensino da matemática pode se tornar um momento extremamente rico e interessante com a utilização da Modelagem Matemática nas atividades de ensino. O educando assumirá, desta forma atitudes que favoreçam a construção de conhecimentos significativos. Esta concepção construtivista de ensino, que considera todos os conhecimentos anteriores do educando, permeia constantemente a prática da Modelagem Matemática.

Não se entrou nas especificidades desta abordagem, pois a mesma não é nosso

objeto de estudo. Limitarnos-emos em dizer que esta abordagem prioriza o processo sócio-cultural, e isto em educação, significa partir da realidade do educando.

Abre-se a possibilidade de um ensino que privilegie a reflexão e a construção de um vínculo entre os conteúdos ensinados e o cotidiano dos nossos educandos, corroborando no seu desenvolvimento social, intelectual e pessoal.

Referências Bibliográficas:

ANTUNES, C. **Vygotsky, Quem Diria?! Em Minha Sala de Aula**. Petrópolis: Vozes, 2002.

BASSANEZI, R.C. **Ensino, Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. Editora Contexto: São Paulo, (2002).

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília, 1999.

BURAK, D. **Modelagem Matemática: Ações e interações no processo ensino-aprendizagem**. Campinas: FE/UNICAMP, 1992. 329 f. tese (doutorado em psicologia educacional)

BURAK, D. **Formação dos Pensamentos Algébrico e Geométrico: Uma experiência com a modelagem matemática**. Pró-Mat Paraná. Curitiba. V.1, nº 1, p.32-41, 1998.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: produção e dissolução da realidade. In: **VIII ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática)**. Pernambuco. Anais.

UFPE, 2004.

CHAVES, S. N. **A Construção Coletiva de Uma Prática de Formação de Professores de Ciências: tensões entre o pensar e o agir.** (Tese de Doutorado) UNICAMP, Campinas 2000.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Editora Ática, 12º edição, 2007.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa.** São Paulo: Paz e Terra, 1996.

LIBÂNEO, J. C. **Didática.** São Paulo: Cortez, 1994.

LÜDKE, M; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.** São Paulo: Ed. E.P.U, 1986.

SADOVSKI, P. **O Ensino da Matemática Hoje: Enfoques, sentidos e desafios.** São Paulo: Editora Ática, 1º edição, 2007.

VASCONCELOS, C. S. **Construção do Conhecimento em Sala de Aula.** São Paulo: Libertad, 1995.

O CRITÉRIO DE EISENSTEIN

Viviane Zawadzki ¹⁸, Gilson Tumelero ¹⁹

Resumo

Neste trabalho comenta-se alguns métodos utilizados no ensino fundamental e médio para se encontrar raízes de polinômios. Em seguida é apresentado um teorema sob a luz da álgebra que pode nos auxiliar na busca destas raízes.

Palavras-chave: Polinômios, raiz, irredutível.

Raízes: Como Encontrá-las?

Um dos temas que desperta ainda muito interesse de pesquisadores matemáticos é o estudo de raízes de funções. Isto talvez, por não existir um método geral para encontrar tais raízes e a necessidade de encontrá-las em aplicações matemáticas.

Claro que este trabalho tem objetivos muito mais modestos do que encontrar um meio de calcular as raízes de funções. Nos dedicaremos a analisar a existência ou não de raízes reais de funções polinomiais sobre o corpo dos números racionais.

Também serão discutidos alguns métodos utilizados no ensino médio para se encontrar raízes deste tipo de função, a saber, a fórmula de Bháskara, as relações de Girardi e o dispositivo prático de Briot - Ruffini, e por fim apresentar um resultado sob a luz da álgebra, para nos auxiliar na decisão de existência ou não de raiz racional.

Para iniciarmos vamos formalizar e definir alguns conceitos e também estaremos supondo uma certa familiaridade do leitor com algumas estruturas algébricas.

¹⁸Acadêmica do Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de União da Vitória

¹⁹Professor orientador do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de União da Vitória- FAFIUV E-mail:tumeleromat@yahoo.com.br

Definição 1 *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um polinômio numa variável sobre A é uma seqüência $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ onde $a_i \in A$ para todo índice e onde $a_i \neq 0$ somente para um número finito de índices.*

Exemplo 2 $A = R$ e então podemos representar um polinômio por $p = (2, 3, 1, 0, 0, 0, \dots)$ o que representa o mesmo polinômio na variável x , $p(x) = 2 + 3x + x^2$.

Exemplo 3 $q = (3, 2, 2, 5, \dots)$ ou $q(x) = 3 + 2x + 2x^2 + 5x^3$.

Neste trabalho vamos nos concentrar nos polinômios em $Q[x]$, isto é com coeficientes no corpo dos números racionais, uma vez que em livros e materiais para ensino fundamental e médio encontramos basicamente este tipo de polinômio.

Definição 2 *Seja A um anel e seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in A[x]$ com $a_n \neq 0$. O número natural n chama-se grau de f . O coeficiente a_n é chamado de coeficiente líder de f e quando o coeficiente líder for 1 dizemos que f é um polinômio mônico.*

Exemplo 4 $p(x) = 2 + 3x + 4x^4 + 5x^6$ temos um polinômio de grau 6.

Denotaremos o grau de $p(x)$ por ∂p ou $gr p$.

Definição 3 *Seja A um anel e $p(x) \in A[x]$. Dizemos que $\alpha \in A$ e é uma raiz de $p(x)$ se satisfaz $p(\alpha) = 0$.*

Teorema 2 *Seja $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ um polinômio não nulo de grau n . Então $p(x)$ possui no máximo n raízes em \mathbb{K} .*

Resultado este que nos leva a questão como:

- Como encontrar tais raízes?
- Como saber exatamente quantas raízes existem em \mathbb{K} ?

Questões estas que podem nos deixar ainda mais intrigados com o seguinte e um dos mais importantes resultados de álgebra.

Teorema 3 (Teorema Fundamental da Álgebra): *Seja $p(x)$ um polinômio de $\mathbb{K}[x]$ com $\text{gr} p \geq 0$ onde $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Então temos que existe pelo menos uma raiz de $p(x)$ em \mathbb{C} .*

A questão de quantas raízes tem um polinômio de grau n está intimamente ligada ao conjunto onde estamos procurando-as. Assim por exemplo, temos que o conjunto dos números complexos é um corpo algebricamente fechado, isto é, sendo $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} tem-se que $p(x)$ todas as raízes em \mathbb{C} . Assim se $\text{gr} p = n$ então as n raízes de p estão em \mathbb{C} .

O mesmo nem sempre acontece com os conjuntos (corpos) \mathbb{Q}, \mathbb{R} , por exemplo, o polinômio $p(x) = x^2 + 1$ não possui raízes nem em \mathbb{Q} e nem em \mathbb{R} . Assim, para nos auxiliar na busca de tais raízes, iremos apresentar um resultado que pode nos auxiliar pelo menos na eliminação de alguns conjuntos em que não estarão as raízes. Mas para isto ainda precisamos de mais alguns conceitos. Este conceito tem uma certa analogia com o conjunto dos números primos de \mathbb{Z} . Então:

Definição 4 *Seja $\mathbb{K}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ um corpo e $\mathbb{K}[x]$ um anel de polinômios. Seja $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que $\text{gr} f \geq 1$. Dizemos que $f(x)$ é um polinômio irredutível sobre \mathbb{K} se toda vez que $f(x) = g(x).h(x)$, com $g(x), h(x) \in \mathbb{K}[x]$, então temos que $g(x) = a$ constante em \mathbb{K} ou $h(x) = b$ constante em \mathbb{K} . Se $f(x)$ for não irredutível sobre \mathbb{K} dizemos que f é redutível.*

Durante o ensino fundamental e médio (educação básica) aprendemos algumas formas de descobrirmos as raízes de polinômios, em geral de polinômios de graus 1, 2 ou 3.

Para polinômios de grau 1 encontramos facilmente a raiz, isto é, se $p(x) = ax + b$ temos que a raiz de p é dada por $\frac{-b}{a}$. Para isto basta igualarmos $p(x)$ a 0 e isolarmos o valor x .

Para um polinômio de grau 2, temos a fórmula de “Bháskara” para encontrarmos as raízes embora não seja a única. Porém a fórmula de Bháskara associada ao conhecimento do conjunto dos números complexos é um modo muito eficiente de obter as raízes em C . Lembrando que sendo $p(x) = ax^2 + bx + c$ as raízes são dadas por:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Outra maneira apresentada no ensino médio para encontrarmos as raízes de polinômios de grau maior ou igual a 2, são as chamadas relações de Girardi. Relações estas que fazem relações diretamente dos coeficientes com as raízes dos polinômios. Para um polinômio de grau 2 $p(x) = ax^2 + bx + c$ as raízes r_1 e r_2 podem ser obtidas pelas seguintes relações:

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}$$

$$r_1 - r_2 = \frac{c}{a}$$

Estas relações também são conhecidas por “soma e produto”. Estas relações também podem ser generalizadas para polinômios de grau maior que dois, por exemplo, para um polinômio de grau 3, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, as raízes r_1 , r_2 e r_3 podem ser obtidas resolvendo o sistema:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-b}{a}$$

$$r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_1.r_4 + r_2.r_3 + r_2.r_4 + r_3.r_4 = \frac{c}{a}$$

$$r_1.r_2.r_3 + r_1.r_2.r_4 + r_1.r_3.r_4 + r_2.r_3.r_4 = \frac{-d}{a}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = \frac{e}{a}$$

Podemos observar que a medida que o grau do polinômio aumenta temos relações e sistemas cada vez mais complicados de se resolver e fica mais difícil ainda se as raízes forem números complexos não reais.

Há também casos de polinômios em que é de fácil verificação algumas raízes. Neste caso, temos o chamado dispositivo prático de Briot - Ruffini que tem por objetivo principal reduzir o grau do polinômio inicial, tornando assim, um polinômio mais “simples” para encontrar suas raízes.

Mas antes de apresentá-lo precisamos de alguns resultados que o justifique.

Teorema 4 (do resto): *Seja $p(x)$ um polinômio tal que $p \geq 1$. O resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$ é igual a $p(a)$.*

E como consequência deste teorema temos:

Teorema 5 (D' Alembert): *Um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$ (resto igual ao polinômio nulo) quando a for uma raiz de p .*

Com isso podemos apresentar o dispositivo prático de Briot - Ruffini, o qual faremos através de um exemplo:

Seja $p(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$, notemos que -1 é raiz de p . Assim, nos resta descobrir duas raízes de p . Agora se dividirmos $p(x)$ por $x + 1$ obteremos um polinômio de grau 2 onde podemos utilizar a fórmula de Bháskara para encontrá-las. Isto se justifica pelo seguinte resultado.

Teorema 6 : *Seja K um corpo algebricamente fechado. Dado um polinômio não constante $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, se $\text{gr} p = n$, então existem $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{K}$ de maneira que $p = a(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$, sendo a o coeficiente dominante e $r_i, i = 1, \dots, n$, raízes de p .*

Para construir o dispositivo, vamos seguir o seguinte roteiro:

1º) Colocar ao lado da raiz do divisor os coeficientes ordenados do dividendo $p(x)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline & & & & \end{array}$$

2º) "Abaixar" o primeiro coeficiente do dividendo (1) e multiplicá-lo pela raiz do divisor.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline & & 1 & & \end{array}$$

3º) Somar o produto com o coeficiente seguinte $(-1 + 1)$. O resultado é colocado abaixo desse coeficiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline & & 1 & 0 & \end{array}$$

4º) Repetir esta operação (multiplicar pela raiz e somar com o coeficiente seguinte) assim por diante.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline & & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

O último coeficiente obtido é o resto da divisão e os demais são os coeficientes ordenados do quociente $q(x) = -x^2 + 2$ cujas raízes obtemos facilmente são $\sqrt{-2}$, $\sqrt{2}$.

Este dispositivo pode nos auxiliar e muito, combinado com os resultados anteriores. Mas o fato é que recaímos no problema inicial, "encontrar raízes" para podermos aplicar o tal dispositivo.

Para nos auxiliar nesta busca temos o seguinte resultado.

Teorema 7 (Critério de Einsenstein): Seja $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx_n$ um polinômio em $\mathbb{Z}[x]$, suponhamos que exista um inteiro primo p tal que:

- a) p não é um divisor de a_n ;
- b) $p \nmid a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$;

c) p^2 não é um divisor de a_0 .

Então $f(x)$ é irredutível sobre \mathbb{Q} .

Isto quer dizer, aqui para nós que se tivermos um polinômio com coeficientes inteiros que satisfazem o critério de Einsenstein, ele não terá nenhuma raiz em \mathbb{Q} , o que torna nossa busca muito mais difícil, pois estas raízes estão no conjunto dos irracionais ou no conjunto dos números complexos, os quais não estamos tão habituados a trabalhar.

Por exemplo:

1) $x^2 - 2$ satisfaz o critério de Einsenstein para o primo 2. Logo ele é irredutível sobre \mathbb{Q} . Embora neste caso encontramos facilmente as raízes $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

2) $p(x) = x^4 + 3x^2 + 6x + 15$. Note também que $p(x)$ satisfaz o critério de Einsenstein para o primo 3. Então $p(x)$ é irredutível sobre \mathbb{Q} , isto significa que $p(x)$ não tem nenhuma raiz racional.

Este critério pode ser encontrado com sua demonstração no livro *Introdução à Álgebra* do autor Adilson Gonçalves.

Referências Bibliográficas:

DOMINGUES, H.H., IEZZI, G.: **Álgebra Moderna**, Atual, (1982).

GARCIA, A; LEQUAIN, Y.: **Elementos de Álgebra** 2^a. Ed, Rio de Janeiro. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, R. J. **Matemática: Uma nova Abordagem**. FTD, São Paulo: 2001.

GONÇALVES, A.: **Introdução à Álgebra**, 4^a ed., Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1999.

IEZZI, G. et al. **Matemática. Volume Único.** Atual, São Paulo: 2002.

LANG, S.: **Algebra**, Traduzido ao espanhol por Milagros Ancochea. Aguilar, Madrid: 1977.

PROGRAMAÇÃO LINEAR: UMA IMPORTANTE VERTENTE DA PESQUISA OPERACIONAL

Sandro Rodrigues²⁰, Tatianne Andréia Verboski²¹

Resumo

A Pesquisa Operacional utiliza métodos científicos em problemas de campo econômico, governamental, militar, pessoal entre outros. Sua análise serve de orientação aos responsáveis e encontrar a melhor solução para seus problemas, podendo assumir de maneira eficaz e satisfatória a coordenação de setores, através de modelos matemáticos simplificados, pois apresenta soluções que servirão de apoio ao responsável. A Pesquisa Operacional possui um vasto campo empregatício nos dias atuais, pois vem se destacando cada vez mais em áreas técnicas de grandes empresas, principalmente por ter a finalidade de mostrar soluções ótimas na disponibilidade de recursos, seja pessoal ou material. Para isso, a Pesquisa Operacional conta com um particular apoio da Programação Linear, pois esta proporciona um método eficiente para se chegar à solução ótima.

Palavras-chave: Otimização, Pesquisa Operacional, Programação Linear.

Introdução

O presente artigo propõe apenas introduzir o campo da Pesquisa Operacional tendo como base principal a Programação Linear. Uma vez que, sem dúvida, a Pesquisa Operacional é um vasto campo, que por se tratar de uma ciência um tanto quanto nova, se expande rapidamente nas mais variadas profissões. A Pesquisa Operacional ou simplesmente PO, teve seu início no século XX, durante a Segunda Guerra Mundial,

²⁰Graduado em Licenciatura Plena em Matemática e Especialista em Matemática Aplicada pela FAFI-UV. Aluno do curso de Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia pela UFPR.

²¹Graduada em Licenciatura Plena em Matemática e Especialista em Matemática Aplicada pela FAFI-UV. Aluna do curso de Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia pela UFPR.

onde uma equipe de cientistas norte-americanos e ingleses teve que estudar os problemas relativos à defesa aérea da Grã-Bretanha.

Essa equipe contava ainda com físicos, matemáticos e engenheiros, tinham que estudar a maneira mais eficiente da utilização dos equipamentos militares, principalmente do radar. Estudar como obter a melhor segurança dos comboios que atravessavam o oceano Atlântico Norte levando suprimentos para a Europa. E, os navios aliados estavam sendo torpedeado pelas tropas alemãs na travessia do oceano Atlântico. Para tanto, tinham a sua inteira disposição todos os recursos militares.

Por volta de 1947, após a guerra, George Dantzig que integrava o projeto *Scientific Computation of Optimum Programs (SCOOP)* da Força Aérea Americana, desenvolveu do método Simplex que fez com que a PO fosse vista com outros olhos, deixando de pertencer somente ao campo militar, mas também na economia, principalmente nas empresas civis. Sendo que, a história conta com registros de sua utilização em empresas dos EUA em 1951.

É importante salientar que aqui, o termo *programação* tem sentido de *planejamento*. Assim, não deve haver equívoco de compará-lo como *programação de computadores*, que é comumente utilizado na Ciência da Computação. Embora, a PO utilize computadores para resolver seus problemas, deixamos assim, especificado o real sentido da *programação* em nosso trabalho.

A Pesquisa Operacional e Sua Aliada Programação Linear

Como a Pesquisa Operacional está vinculada a diversos campos, então, para cada um deles, ela utiliza um método diferente que se adapte da melhor maneira possível para chegar à solução ótima. Podemos citar: Programação Linear (PL), Programação Inteira (PI), Programação Dinâmica, Teoria das Filas, Teoria dos Grafos, Simulação e Teoria dos Jogos. Mas, aqui, nos reportaremos apenas a Programação Linear.

Utilizando a programação linear, podemos resolver problemas de alocação de recursos, de produção, na aérea pessoal e material, de corte de materiais, principalmente de madeiras, chapas de aço e alumínio, de transporte, de designação ou atribuição de tarefas, economia etc. (PASSOS, 2008, p. 2)

A Programação Linear (PL) teve seu início ainda no século XVII, em estudos realizados por grandes matemáticos da época: Newton, Bernoulli e Lagrange. Mas, foi no século XX que a PL teve seu auge com os cientistas Leonid Kantorovitch, Prêmio Nobel de Economia em 1975 e autor de Métodos Matemáticos de Planejamento e Organização, George Stigler autor do Problema da Dieta (1946), Tjalling Koopmans autor do Problema de Transporte e George Dantzig autor do Método Simplex (1947).

Programação linear é uma técnica de otimização aplicada em sistemas de equações (ou inequações) lineares representativos de modelos previamente elaborados. Um problema de otimização em programação linear é um problema em que se quer maximizar ou minimizar uma função linear, sujeita a algumas restrições lineares. Ou seja, em PL procura-se determinar os valores das variáveis que minimizam ou maximizam uma função, denominada objetivo, que deve satisfazer a certas restrições, que são equações (igualdades) ou inequações (desigualdades) lineares. (PASSOS, 2008, p. 8)

Pode-se perceber pelas palavras de PASSOS (2008) que a PL tem por objetivo encontrar o lucro máximo ou o custo mínimo. E, segundo PRADO (2007), o uso da PL destaca como vantagens: a identificação das melhores opções em estudos de qualidade total; permite a identificação de “furos” na linha de produção; fornece diretrizes para expansão; possibilita avaliar o potencial de aplicabilidade de uma pesquisa. PRADO (2007) expande suas considerações citando algumas aplicações da PL, como: dietas alimentares, formulação de rações, fábrica de adubos, ligas metálicas, indústria petrolífera, indústria química, indústria moveleira, metalúrgicas, transporte, investimentos financeiros, alocação de recursos, agricultura, agropecuária, manufatura, designação.

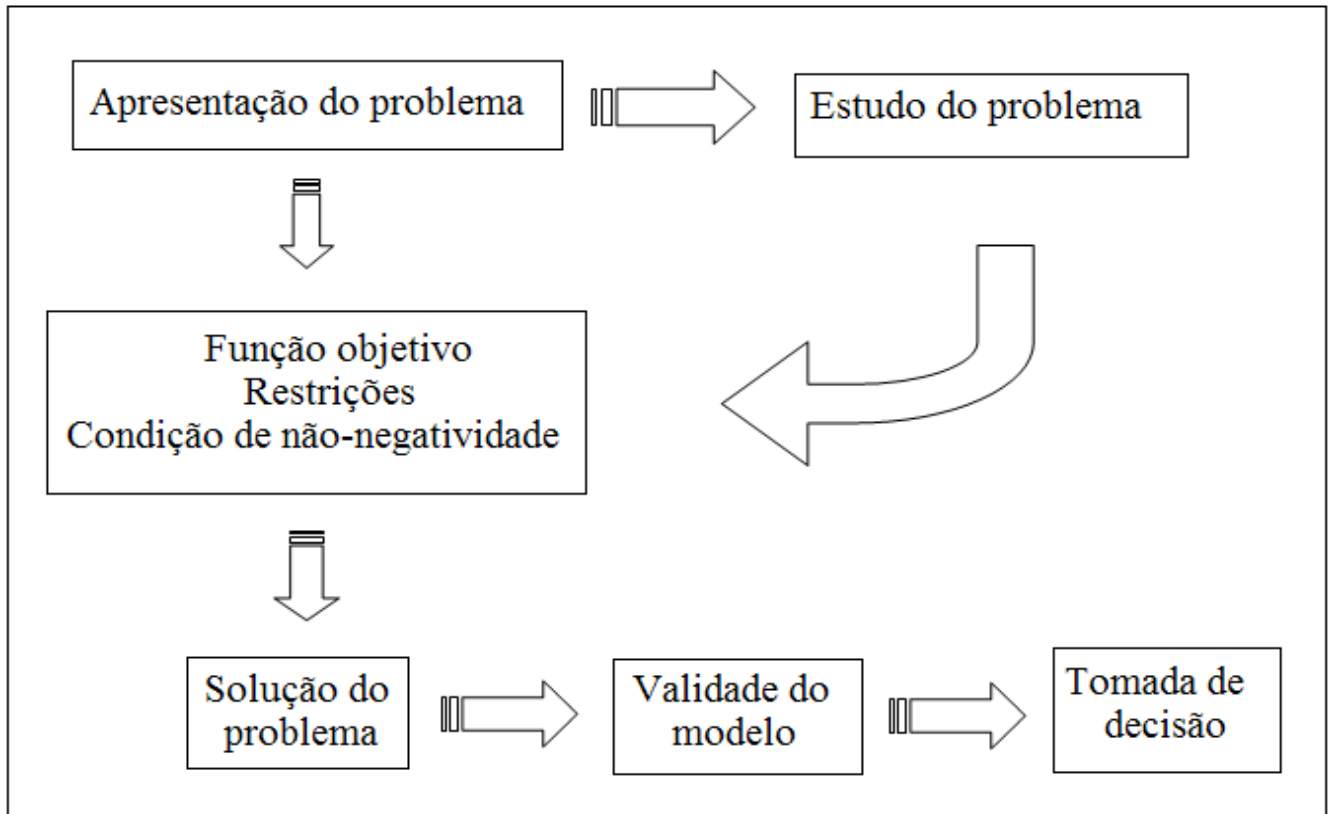
Construção do Modelo

Um modelo em PL refere-se a uma representação simplificada da realidade do problema. Com esses modelos podemos prever e explicar os fenômenos que podem ocorrer e tem por objetivo assessorar a tomada da melhor decisão. Ou seja, eles descrevem um problema. Sua qualidade irá depender da sua estruturação, pois a precisão é fundamental, não deve haver dúvidas quanto a sua interpretação, utilizando todos os recursos disponíveis já existentes ou adquiridos com o próprio fornecedor.

Para se elaborar tal modelo PASSOS (2008) sugere as seguintes etapas: identificar o problema a modelar; verificar os recursos disponíveis; verificar o dado técnico referente ao problema que se quer modelar (produtos ou serviços) e fazer a formulação matemática do problema (modelagem). O mesmo autor ainda comenta algumas características que devem ser levadas em consideração no desenvolvimento de um modelo:

- Variáveis de decisão: medem a quantidade de diferentes recursos (produtos, pessoas, litros, caixas, quilômetros, horas, etc.) que se quer determinar. A partir delas que se dará a quantidade de recursos que serão maximizados ou minimizados. A nomeação inicial deve-se manter até o final.
- Função objetivo: mostrará o que se quer otimizar, simplesmente indica o objetivo que se quer conseguir, ou ainda, com ela encontra-se o valor ótimo vindo da maximização ou minimização. É composta pelas variáveis de decisão.
- Restrições: condições que limitam o problema, ou seja, impõem os valores que poderão ser assumidos pelas variáveis de decisão, deixando-as totalmente sujeitas a estas limitações, formando um sistema de equações ou inequações que trará como resolução os valores das variáveis de decisão.
- Condição de não-negatividade: mostra que os valores das variáveis serão não negativos. Condição lógica do modelo.

Podemos resumir um Problema de Programação Linear (PPL) com o seguinte esquema:



Na forma padrão do modelo de PL as restrições são escritas como equações matemáticas, da seguinte forma:

$$\begin{array}{l}
 \text{Max(Min)} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n \rightarrow \text{Função Objetivo.} \\
 \left. \begin{array}{l}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 \text{Sujeito a: } a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\
 \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
 \end{array} \right\} \text{Restrições.}
 \end{array}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ Condição de não negatividade

$X : \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ variáveis de decisão;

$A : \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ coeficientes das variáveis;

$B : \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ termos independentes (recursos disponíveis).

Na forma canônica, as restrições são apresentadas na forma de inequações, ficando com o seguinte aspecto:

$$\begin{array}{l}
 \text{Max(Min)} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{Função Objetivo.} \\
 \left. \begin{array}{l}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \leq (\text{ou } \geq) b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \leq (\text{ou } \geq) b_2 \\
 \text{Sujeito a: } a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \leq (\text{ou } \geq) b_3 \\
 \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \leq (\text{ou } \geq) b_m
 \end{array} \right\} \text{Restrições.} \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ Condição de não negatividade}
 \end{array}$$

Na forma algébrica

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Max(ou Min)} \quad Z = CX; \\
 AX \leq (= \text{ ou } \geq) B; \\
 X \geq 0.
 \end{array} \right.$$

ou equivalentemente, na forma matricial:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Max(ouMin)} \left[c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \cdots \quad c_n \right] \cdot \left. \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\} \text{Função objetivo.} \\
\left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] \cdot \left. \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\} \left(\begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right) \left. \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{array} \right\} \text{Restrições.} \\
\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right] \cdot \left. \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right\} \geq \left. \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} \text{Condição de não - negatividade.}
\end{array} \right.$$

Observa-se que para voltar à forma original que foi apresentada, basta efetuar a multiplicação dessas matrizes.

Construção Comentada de Um Modelo

A construção de um modelo nada mais é do que um sistema representando o mais próximo possível a realidade do problema, sem deixar de lado as peculiaridades e limitações desse problema. O objetivo principal de um problema de PL é chegar a uma solução ótima, seja maximizando ou minimizando uma função objetivo de n variáveis, que está sujeita a m restrições na forma de equações lineares, isso se estiver na forma padrão, ou inequações lineares, se estiver na forma canônica.

Não há uma única forma ou uma forma padrão para se formular um modelo. Porém, segundo PASSOS (2008), podemos evidenciar, inicialmente, a escolha das

variáveis de decisão que, uma vez escolhidas devem ser mantidas até o final da resolução do modelo. Na seqüência, será feita a elaboração da função objetivo, levando em consideração as variáveis de decisão já definidas, especificando se o problema será de maximização ou minimização. E, então, verificar todas as limitações que interferem no problema, formando assim, as restrições.

A seguir, mostraremos a construção de um modelo com um problema típico de Programação Linear:

O Problema do Sítio

Um sitiante está planejando sua estratégia de plantio para o próximo ano. Por informações obtidas nos órgãos governamentais, sabe que as culturas de trigo, arroz e milho serão as mais rentáveis na próxima safra. Por experiência, sabe que a produtividade de sua terra para as culturas desejadas é a constante na tabela abaixo:

Cultura	Produtividade em kg por m^2 (experiência)	Lucro por kg de Produção (Informações do Governo)
Trigo	0,2	10,8 centavos
Arroz	0,3	4,2 centavos
Milho	0,4	2,03 centavos

Por falta de um local de armazenamento próprio, a produção máxima, em toneladas, está limitada a 60. A área cultivável do sítio é de 200.000 m^2 . Para atender as demandas de seu próprio sítio são necessários que se plante 400 m^2 de trigo, 800 m^2 de arroz e 10.000 m^2 de milho.

Então, para elaborar o modelo representativo desse problema, seguiremos os seguintes passos:

1º) Escolha das variáveis de decisão

Nesse problema poderíamos ficar em dúvida sobre qual variável de decisão utilizar:

quantidade de quilos a ser produzida em cada cultura ou área a ser plantada. Optaremos pela área a ser plantada calculando-se, em conseqüência, as variáveis em área.

x_i = quantidade de unidades de área a serem plantadas na cultura do tipo

$i = (T - Trigo, A - Arroz, M - Milho)$.

2º) Elaboração de função objetivo

Os coeficientes da função objetivo deverão ser calculados multiplicando-se a produtividade por quilo pelo lucro previsto para cada quilo. O resultado do coeficiente será uma unidade monetária, no caso, o centavo.

$$\text{Maximizar } Z = 2,16x_t + 1,26x_a + 0,812x_m$$

Lucro em centavos

3º) Formação das restrições

a) Restrições associadas à demanda do sítio (em unidade de área: m^2)

$$x_t \geq 400$$

$$x_a \geq 800$$

$$x_m \geq 10.000$$

b) Restrição associadas à área total disponível:

$$x_t + x_a + x_m \leq 20.000$$

c) Restrição associada ao armazenamento (em quilos):

Nesse caso teremos que utilizar os coeficientes da produtividade por unidade de área para obter um valor final em quilos:

$$0,2x_t + 0,3x_a + 0,4x_m \leq 60.000$$

4º) Restrições de não negatividade:

$$x_t \geq 0, x_a \geq 0, x_m \geq 0$$

Finalmente, o modelo, será apresentado como:

$$\text{Max}Z = 2,16x_t + 1,26x_a + 0,812x_m$$

$$\text{Sujeito a } x_t + x_a + x_m \leq 20.000$$

$$0,2x_t + 0,3x_a + 0,4x_m \leq 60.000$$

$$x_t \geq 400$$

$$x_a \geq 800$$

$$x_m \geq 10.000$$

$$x_t \geq 0, x_a \geq 0, x_m \geq 0$$

Destacamos que, nosso trabalho se restringe apenas a fase de obtenção de modelos lineares (modelos matemáticos). A fase seguinte, responsável em obter a solução do problema não será mostrada.

Considerações Finais

Ao escrever este artigo, nos validamos das notas de aulas que utilizamos no ensino dessa disciplina. É evidente, também, que nos embasamos em experiências de autores consagrados neste assunto, para explicar e, muitas vezes, nos fazer entender de uma forma mais simples.

Partindo desse pressuposto, podemos observar que a Pesquisa Operacional vem proporcionando soluções aos problemas que surgem em variados campos de organização e produção de serviços e mercadorias. É evidente seu destaque nas empresas que buscam aperfeiçoar seus processos de produção, uma vez que, a eficácia na organização é primordial para o seu crescimento.

Buscamos assim, de maneira sucinta, mostrar a importância do conhecimento científico voltado à tomada de decisões, bem como, as adjacências do conhecimento

manifestadas através das necessidades dos seres humanos.

Referências Bibliográficas:

ACKOFF, R. L.; SASIENI, M. W. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: LTC, 1971.

ANDRADE, E. L. de. **Introdução à Pesquisa Operacional**: métodos e modelos para análise de decisão. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

BRONSON, R. **Pesquisa Operacional**. São Paulo: McGraw-Hill, 1985

CHVATAL, V. **Linear Programming**. San Francisco: W. H. Freeman, 1983.

GASS, S. I. **Linear Programming**: methods and applications. 4. ed. McGraw-Hill, 1975.

GOLDBARG, M. C. **Otimização combinatória e programação linear**. Rio de Janeiro: Campos, 2000.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa Operacional na tomada de decisões**. Rio de Janeiro: Campus, 2002.

MURTY, K. G. **Linear and combinatorial programming**. Florida: Robert E. Krieger Publishing Company, 1985.

PASSOS, E. J. P. F. dos. **Programação Linear como instrumento da Pesquisa Operacional**. São Paulo: Atlas, 2008.

PRADO, D. **Programação Linear**. Minas Gerais: INDG Tecnologia e Serviços Ltda, 2007. (Série Pesquisa Operacional - vol. 1, 5. ed.)

SHAMBLIN, J. E.; STEVENS, G. T. **Pesquisa Operacional**: uma abordagem básica. São Paulo: Atlas, 1979.

SILVA, E. M. da. et al. **Pesquisa Operacional**. 2. ed. São Paulo: Editora Atlas, 1996.

RICHARD HAMMING E A TEORIA DOS CÓDIGOS

Luciano Panek ²²

Resumo

Neste trabalho estudamos os procedimentos de detecção e correção de erros baseados no código binário de Hamming de dimensão quatro. Para tanto apresentamos uma breve introdução sobre corpos finitos de cardinalidade prima e códigos lineares.

Palavras-chave: Códigos lineares; distância de Hamming; códigos binários de Hamming

Introdução

Frustrado com o funcionamento limitado de seu computador (que apenas acusava erros), Richard Wesley Hamming, em 1947, formula os conceitos básicos da *Teoria dos Códigos* (distância de Hamming, códigos equivalentes, limitante de Hamming) e idealiza a primeira família de códigos corretores de erros, conhecidos agora por *Códigos de Hamming* (suas idéias foram publicadas somente em 1950 [HAMMING]):

[...] Two weekends in a row I came in and found that all my stuff had been dumped and nothing was done And so I said, ‘Damn it, if the machine can detect an error, why can’t it locate the position of the error and correct it?’(R. W. Hamming, interview, february 3, 1977.)

Um exemplo de dimensão baixa do código idealizado por Hamming aparece pela primeira vez em 1948 no trabalho “*A Mathematical Theory of Communication*” de

²²Profesor da Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE - Campus Foz do Iguaçu
E-mail: lucpanek@gmail.com

Claude Elwood Shannon²³ ([SHANNON]). Shannon, em seu trabalho, estabelece parâmetros sobre a capacidade do canal de comunicação que garantem a existência de códigos corretores de erros eficientes. A partir daí começou a busca por tais códigos: as primeiras famílias de bons códigos foram apresentadas em 1949 e 1950 por Marcel Golay e Richard Hamming respectivamente.

Em um sistema de comunicação (por exemplo, celular, internet ou transmissão de imagem via satélite) os dados são associados a sequências de bits e transmitidos em forma de ondas (com amplitude variada, dependendo do canal). As ondas ficam sujeitas aos diversos tipos de interferências físicas (como campos magnéticos) e no processo inverso (quando demodulamos os dados) existe a possibilidade de ocorrência de erros (troca de bits). A teoria dos códigos corretores de erros é responsável pelos mecanismos matemáticos que recuperam (sobre certas condições) os dados transmitidos a partir dos dados recebidos (contendo erros).

Os códigos binários de Hamming têm a capacidade de detectar dois erros e corrigir um erro. Neste trabalho descrevemos alguns dos mecanismos de detecção e correção de erros baseados nos códigos binários de Hamming. Todos os nossos argumentos serão construídos sobre o código binário de Hamming de dimensão quatro (a extensão para o caso genérico é bastante natural e pode ser encontrada em qualquer bom livro de teoria dos códigos (ver [HEFEZ])). Como veremos, a estrutura algébrica dos códigos binários de Hamming é a estrutura vetorial sobre um corpo com dois elementos. Por este motivo começamos nosso trabalho com uma breve introdução (somente com os resultados necessários para o desenvolvimento do texto) sobre corpos finitos de cardinalidade prima e espaços vetoriais. Nossas fontes são os livros [ALVES], [BOLDRINI] e [DOMINGUES]. Omitiremos as demonstrações de alguns resultados. Estas demonstrações podem ser encontradas nos materiais citados.

²³Shannon de fato atribui a autoria do código ao colega Hamming.

Corpos Finitos

Seja K um conjunto não vazio munido com duas operações $+$ e \cdot chamadas de *soma* e *produto* (ou adição e multiplicação) respectivamente. Diremos que $(K, +, \cdot)$ é um *corpo* se: as operações de adição e multiplicação são associativas e comutativas; existe o elemento neutro em relação a adição (elemento nulo); todo elemento de K é simetrizável em relação a adição (existência do elemento oposto); existe o elemento neutro em relação ao produto (existência da unidade); todo elemento não nulo de K é simetrizável em relação a multiplicação (existência do elemento inverso); o produto é distributivo em relação à adição.

Um corpo $(K, +, \cdot)$ é dito *finito* se K é finito. É conhecido da Teoria de Galois que se um corpo K é finito então sua cardinalidade é uma potência de primo. Mais ainda, para todo primo p e para todo inteiro positivo não nulo m existe um corpo finito K de cardinalidade p^m . Neste trabalho nos restringiremos aos corpos finitos de cardinalidade p .

Seja \mathbb{Z} o conjunto dos números inteiros e para cada inteiro $m > 0$ considere a *relação de congruência módulo m* : $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $a - b = km$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Valem as seguintes propriedades:

Proposição 1 *Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Então:*

(i) $a \equiv a \pmod{m}$;

(ii) se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$;

(iii) se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$;

(iv) se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $(a + c) \equiv (b + d) \pmod{m}$;

(v) se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

Segue das propriedades (i), (ii) e (iii) que \equiv é uma relação de equivalência sobre \mathbb{Z} e portanto induz uma partição em \mathbb{Z} : seja

$$[a] = \{b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \pmod{m}\}$$

a classe de equivalência de a segunda a relação de congruência módulo n ; então

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \dots \cup [m-1]$$

com $[r] \cap [s] = \emptyset$ se $r \neq s$, $0 \leq r, s \leq m-1$.

As propriedades (iv) e (v) nos mostram que as operação

$$[a] + [b] = [a + b]$$

e

$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b]$$

sobre $\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$ não dependem dos representantes das classes de equivalência. O elemento neutro e a unidade de \mathbb{Z}_m são respectivamente as classes $[0]$ e $[1]$. O conjunto $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ satisfaz todas as propriedade de corpo exceto a propriedade que todo elemento não nulo é inversível. É bem conhecido que $[a] \in \mathbb{Z}_m$ é inversível se, e somente se, $\text{mdc}(a, m) = 1$. Segue deste fato que $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ é um corpo se, e somente se, p é um número primo.

Daqui em diante omitiremos os colchetes quando nos referirmos aos elementos do conjunto \mathbb{Z}_m .

Exemplo 5 Considere as tabelas de adição e produto de \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z}_3 e \mathbb{Z}_4 respectivamente:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	1
3	0	3	1	2

\mathbb{Z}_2 e \mathbb{Z}_3 são corpos finitos. Já \mathbb{Z}_4 não é um corpo finito: 2 não é inversível.

Espaços Vetoriais sobre Corpos Finitos

Restringiremos as clássicas definições da teoria de espaços vetoriais ao caso particular dos corpos finitos \mathbb{Z}_p .

Definição 5 *Seja V um conjunto não vazio munido com duas operações $+$: $V \times V \rightarrow V$ e \cdot : $\mathbb{Z}_p \times V \rightarrow V$ tal que:*

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in V$;
2. $x + y = y + x$ para todo $x, y \in V$;
3. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} + x = x$ para todo $x \in V$;
4. Para cada $x \in V$ existe $-x \in V$ tal que $x + (-x) = \mathbf{0}$;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ para todo $x, y \in V$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_p$;
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ para todo $x \in V$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$;
7. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ para todo $x \in V$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$;

8. $1x = x$ para todo $x \in V$;

Então $(V, +, \cdot)$ é dito um espaço vetorial sobre \mathbb{Z}_p .

Os elementos de um espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ são chamados de *vetores*. Já os elementos do corpo finito \mathbb{Z}_p são chamados de *escalares*. Os vetores $x_1, \dots, x_n \in V$ são ditos *linearmente independentes* se

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \mathbf{0}$$

implica $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Se existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_p$ não todos nulos tal que $\sum \alpha_i x_i = \mathbf{0}$ diremos que x_1, \dots, x_n são *linearmente dependentes*. Um subconjunto não vazio U de um espaço vetorial V é dito um *subespaço vetorial* de V se $x + y \in U$ para todo $x, y \in U$ e $\alpha x \in U$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ e $x \in U$. O conjunto

$$[x_1, \dots, x_n] = \{y \in V : y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \text{ com } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_p\}$$

é um subespaço vetorial de V e é chamado de *subespaço gerado* por x_1, \dots, x_n . Se $V = [x_1, \dots, x_n]$ e x_1, \dots, x_n são linearmente independentes então $\{x_1, \dots, x_n\}$ é dito uma *base* de V . Nestas condições diremos que V é um espaço vetorial de *dimensão finita*. O número de vetores da base é a chamada *dimensão* de V e denotada por $\dim(V)$. Assim, se $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base de V e $y \in V$, existem únicos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}_p$ tal que $y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são as *coordenadas* de y .

Exemplo 6 Seja \mathbb{Z}_p^n o conjunto de todas as n -uplas com entradas em \mathbb{Z}_p . O conjunto \mathbb{Z}_p^n munido com as operações

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$$

e

$$\gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\gamma\alpha_1, \dots, \gamma\alpha_n), \gamma \in \mathbb{Z}_p,$$

tem a estrutura de espaço vetorial. Como

$$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$$

é uma base para \mathbb{Z}_p^n , concluímos que $\dim(\mathbb{Z}_p^n) = n$. Segue daí que a cardinalidade de \mathbb{Z}_p^n é p^n .

Códigos Lineares

Nosso objetivo agora é construir um mecanismo eficiente capaz de detectar e corrigir erros. Daqui em diante \mathbb{Z}_p^n será o nosso espaço ambiente. Um subconjunto C de \mathbb{Z}_p^n será chamado de $(n, |C|)$ código, sendo $|X|$ a cardinalidade do conjunto finito X . Os elementos de um código serão as chamadas *palavras-código*.

Definição 6 Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em \mathbb{Z}_p^n , definimos a distância de Hamming $d(x, y)$ entre x e y como sendo o número de coordenadas distintas entre x e y :

$$d(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|.$$

A distância de Hamming é uma métrica em \mathbb{Z}_p^n : $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$; $d(x, y) = d(y, x)$; $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Definimos a *bola* de centro x e raio r como sendo o conjunto

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{Z}_p^n : d(x, y) \leq r\}.$$

O número de coordenadas não nulas de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_p^n$ é o chamado *peso de Hamming* de x e denotado por $w(x)$. Note que $w(x) = d(\mathbf{0}, x)$ e $d(x, y) = w(x - y)$. Seja C um código em \mathbb{Z}_p^n . Suponha que x é a mensagem recebida e que x não é uma palavra-código. Decodificamos x como sendo a palavra código “mais próxima” de x , ou seja, a palavra-código c tal que

$$d(x, c) = \min \{d(x, c') : c' \in C\}.$$

Este processo de decodificação é conhecido como *decodificador por máxima verossimilhança*. Um problema de primeira grandeza em teoria dos códigos é determinar algoritmos de decodificação eficientes.

O quanto podemos errar para termos a certeza de que o decodificador por máxima verossimilhança está retornando a mensagem original? Esta grandeza é conhecida como a *capacidade de correção de erros* do código C e é definida como sendo o número

$$t = \max \{r : B_r(c) \cap B_r(c') = \emptyset, c \neq c' \in C\}.$$

A *distância mínima de Hamming* de um código C é

$$d(C) = \min \{d(c, c') : c \neq c' \in C\}.$$

Teorema 8 *Seja t a capacidade de correção de erros de C . Então*

$$t = \left\lfloor \frac{d(C) - 1}{2} \right\rfloor.$$

Temos dois problemas para resolver (para minimizar). O cálculo da distância mínima e a detecção de erros. Os códigos utilizados na prática são gigantes e por isso a comparação dois a dois (tanto para a detecção de erros quanto para o cálculo da distância mínima) é pouco viável. Estes problemas são minimizados se consideramos a estrutura vetorial.

Definição 7 *Um subespaço vetorial C do espaço \mathbb{Z}_p^n é chamado de código linear. Se $\dim(C) = k$ diremos que C é um $[n, k]$ código. Um $[n, k]$ código C é um (n, q^k) código.*

No caso dos códigos lineares o cálculo da distância mínima se reduz ao cálculo do peso mínimo:

Teorema 9 *Seja C um código linear. Então*

$$d(C) = \min \{w(c) : \mathbf{0} \neq c \in C\}.$$

Apresentaremos agora, para um código específico, soluções satisfatórias para os dois problemas mencionados acima.

Código Binário de Hamming

Seja

$$C = \{(a, b, c, d, b + c + d, a + c + d, a + b + d) : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2\}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} (a, b, c, d, b + c + d, a + c + d, a + b + d) &= a \cdot (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) + \\ &+ b \cdot (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1) + c \cdot (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) + d \cdot (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Como

$$\alpha = \{(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)\}$$

é linearmente independente em \mathbb{Z}_2^7 concluímos que C é um $[7, 4]$ código linear gerado por α (α é uma base de C).

O código C acima é conhecido como *código binário de Hamming* (ou simplesmente código de Hamming). O código de Hamming é denotado classicamente por \mathcal{H}_3 . Nosso objetivo é calcular a distância mínima (e consequentemente a capacidade de correção de erros) de \mathcal{H}_3 . Vamos fazer isto sem explicitar as 2^4 palavras-código de \mathcal{H}_3 .

Como α gera \mathcal{H}_3 , pondo

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

temos que

$$\mathcal{H}_3 = \{(a, b, c, d) \cdot G : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2\}.$$

Considere agora

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $H \cdot G^T = 0$ (a matriz nula). Isto implica que $H \cdot c^T = \mathbf{0}$ para todo $c \in \mathcal{H}_3$. Como o posto (número máximo de linhas ou colunas linearmente independentes) de H é igual a 3, concluímos que a dimensão do espaço solução do sistema homogêneo $H \cdot x^T = \mathbf{0}$ é $7 - 3 = 4$, que é igual a dimensão de \mathcal{H}_3 . Isto implica que

$$\mathcal{H}_3 = \{x \in \mathbb{Z}_2^7 : H \cdot x^T = \mathbf{0}\}.$$

As matrizes G e H descritas acima são conhecidas respectivamente como matrizes *geradora* e de *paridade* de \mathcal{H}_3 .

Seja $c \in \mathcal{H}_3$ tal que $w(c) = s$. Seja $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ as entradas não nulas de c . Como $H \cdot c^T = \mathbf{0}$, concluímos que as colunas $h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_s}$ de H são linearmente dependentes. Vale a recíproca: se $h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_s}$ são colunas linearmente dependentes de H , então existe $c \in \mathcal{H}_3$ tal que $w(c) = s$. Conclusão:

Teorema 10 $d(\mathcal{H}_3) = s$ se, e somente se, todo conjunto com $s - 1$ colunas de H é linearmente independente e existem s colunas linearmente dependentes.

Como todo conjunto com 2 colunas de H é linearmente independente e existem 3 colunas linearmente dependentes ($\{h_2, h_3, h_4\}$ por exemplo):

Teorema 11 $d(\mathcal{H}_3) = 3$.

Consequentemente:

Corolário 1 A capacidade de correção de erros de \mathcal{H}_3 é igual a 1.

O código de Hamming contém 2^4 palavras-código. Sendo assim podemos utilizar \mathcal{H}_3 para codificar 2^4 informações. Como a capacidade de correção de erros de \mathcal{H}_3 é 1, \mathcal{H}_3 deve ser implementado em um canal de comunicação com as seguintes características: a probabilidade de ocorrer mais de um erro é menor do que a probabilidade de ocorrer um erro.

Suponha que nosso canal de comunicação tem as características descritas acima e recebemos a mensagem

$$x = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1).$$

Como $H \cdot x^T = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$, $x \notin \mathcal{H}_3$. Sabemos que uma das coordenadas foi trocada (baseado nas características do canal). Qual? Poderíamos responder a questão comparando x com cada palavras-código de \mathcal{H}_3 . No entanto, observando que $x = c + e_i$ para algum $c \in \mathcal{H}_3$ com e_i sendo o i -ésimo vetor canônico (a única coordenada não nula de e_i é a i -ésima coordenada), temos

$$\begin{aligned} H \cdot x^T &= H \cdot (c + e_i)^T = H \cdot c^T + H \cdot e_i^T = \mathbf{0} + H \cdot e_i^T \\ &= i\text{-ésima coluna de } H. \end{aligned}$$

Assim o erro em x se localiza na última coordenada pois $(1, 1, 1)$ é a última coluna de H : o vetor x é decodificado como sendo a palavra-código

$$c = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0).$$

Referências Bibliográficas:

ALVES, M.M.S.: **Códigos Corretores de Erros**, XI ERMAC, (2007), UFPR, Curitiba-PR.

BOLDRINI, J.L. et al.: **Álgebra Linear**, Harbra, 3a. Edição, (1986).

DOMINGUES, H.H., IEZZI, G.: **Álgebra Moderna**, Atual, (1982).

HAMMING, R.W.: **Error Detecting and Error Correcting Codes** - Bell Syst. Tech. J. (1950) 147-160.

HEFEZ, A., VILLELA, M.L.T.: **Códigos Corretores de Erros**, Série de Computação e Matemática, IMPA, (2002).

SHANNON, C.E.: **A Mathematical Theory of Communication**, Bell System Tech. J. 27 (1948), 379-423.

UMA ANÁLISE SOBRE O CONSUMO DE ÁGUA NA CIDADE DE SÃO MATEUS DO SUL VIA MODELAGEM MATEMÁTICA

Luciana da Fonseca ²⁴, Sérgio Luís Kampmann ²⁵, Michele Regiane Dias Veronez ²⁶

Resumo

Neste trabalho relata-se uma atividade de Modelagem Matemática desenvolvida em Projeto de Pesquisa. O interesse por estudar sobre o consumo de água surgiu após algumas discussões e reflexões realizadas durante leituras de artigos sobre aspectos concernentes ao processo de ensino e aprendizagem da matemática e às aplicações matemáticas. Tal atividade consiste na observação do consumo de água ao longo dos últimos anos na cidade de São Mateus do Sul, tendo como finalidade a elaboração de um modelo matemático que permitisse, além de uma análise sobre esse consumo, uma abordagem de conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem da Matemática, Modelagem Matemática, Aplicações da Matemática.

Introdução

Nesse estudo depositou-se um olhar sobre o consumo de água na cidade de São Mateus do Sul e procurou-se realizar uma análise sobre o mesmo a partir da aplicação de alguns conceitos matemáticos. Nosso interesse era entender como esse consumo se comportava ao longo dos anos e se era possível realizar previsões.

Para tanto nos apoiamos na Modelagem Matemática por considerarmos que ela pode viabilizar uma reflexão da situação em estudo à medida que informações coletadas

²⁴Aluna de Iniciação Científica

²⁵Aluno de Iniciação Científica

²⁶Professora orientadora do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Estadual de Filosofia, Ciências e Letras de União da Vitória- FAFIUV. E-mail: miredias@uol.com.br

e conteúdos matemáticos podem ser trabalhados e discutidos paralelamente. Ainda, a Modelagem Matemática, considerando-a como estratégia de ensino, pode proporcionar desenvolvimento do pensamento crítico, do trabalho em equipe, da capacidade de formular hipóteses e de resolver problemas.

A atividade de modelagem descrita nesse artigo proporcionou que fossem trabalhados modelos e conceitos de forma completa e gradativa contribuindo para a formação da nossa competência crítica.

Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem

A busca por novos métodos de ensino, nos últimos anos, proporcionou o surgimento de algumas tendências em Educação Matemática, dentre elas encontra-se a Modelagem Matemática. Os pesquisadores de tal tendência a apontam como sendo uma maneira de proporcionar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de usarem adequadamente a Matemática como modo de compreensão de situações da realidade. Nessa abordagem é concedida ao aluno a oportunidade de perceber a Matemática em seu meio, considerando-a como uma necessidade natural, científica e social.

Bassanezi (2002) ressalta que a Modelagem Matemática possui características precípuas e a define como sendo “a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas possíveis soluções na linguagem do mundo real”. Nesse contexto defende que a modelagem, a partir de determinada atividade ou execução de um trabalho pode abordar de maneira simplificada uma situação da realidade através de um modelo matemático.

A atividade de Modelagem Matemática pode ser situada basicamente em dois contextos: o da matemática aplicada, onde é vista como método de pesquisa e o do contexto escolar, onde é percebida como estratégia de ensino para as aulas de matemática, não deixando, no entanto, de constituir um método de pesquisa para professores e alunos envolvidos na atividade.

Skovsmose (2001) defende que utilizar a Modelagem Matemática enquanto estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática é dar oportunidade ao aluno de reinventar seu processo de interpretação do conhecimento matemático. Nesse sentido enfatiza que os professores que a utiliza têm a oportunidade, durante o processo de lidar com três tipos diferentes de conhecimento: o próprio conhecimento matemático, o conhecimento tecnológico que, nesse contexto é conhecimento sobre como construir e usar um modelo matemático; e o conhecimento reflexivo que pode ser interpretado como um referencial teórico mais conceitual, ou meta-conhecimento para que se possa discutir a natureza dos modelos e o critério usado em sua construção, aplicação e avaliação.

Para Almeida (2003) trabalhar com atividades de modelagem em contexto escolar constitui um desafio para professores e alunos, pois ambos assumem papel ativo no processo de ensino e aprendizagem. Ela aponta que ao professor cabe auxiliar o aluno na compreensão da situação em foco, construindo relações matemáticas significativa em cada etapa do processo. Ainda, o trabalho com modelagem exige do professor que ele conduza a aula de forma mais significativa contribuindo para que o aluno interiorize e adquira conceitos e que tenha possibilidade de interligar os conteúdos abordados na escola com situações da sua realidade.

Bicudo (1999) coloca que o professor envolvido com as tendências em Educação Matemática encontra-se em uma posição de “ação”, e que esta está voltada para uma situação conseqüente, ou seja, o professor que pretende auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos, somente obterá êxito em suas práticas se oferecer pontos de vista distintos sobre um mesmo assunto, relacionando-o com outros conteúdos já tratados e suas possíveis aplicações.

No que se refere ao aluno, Almeida (2003) afirma que ele precisa conceber que é essencial o seu envolvimento com as atividades propostas para que a aprendizagem de fato aconteça. Para tanto o aluno tem que ser considerado como peça chave do processo de ensino e aprendizagem e não como mero expectador, onde somente o professor tem

voz na sala de aula enquanto repassa o seu conhecimento. É fundamental oportunizar ao aluno condições necessárias para que o mesmo encontre a direção da construção do conhecimento.

Quando o trabalho com a matemática em sala de aula é entendido como um momento de construção de conceitos e significados matemáticos pode proporcionar ao professor e aos alunos entusiasmo com a tarefa de aprender e de aprender a aprender.

Como a matemática encontra-se num parâmetro de dificuldades delineadas por alunos e professores inseridos no contexto de ensino e aprendizagem é interessante que haja uma integração com as diversas tendências em Educação Matemática, pois elas apresentam novas concepções que visam contribuir para a solução de problemas vinculados ao seu ensino e sua aprendizagem. Sendo assim, seria adequado encará-las como necessárias na prática pedagógica do professor.

Contudo utilizar-se de métodos diferenciados no processo de ensino e aprendizagem da Matemática gera muitas discussões visto que tal atitude exige do professor um repensar sobre a forma como ele se sente inserido nesse processo ou à forma como ele concebe o seu papel de educar.

Uma atividade de Modelagem Matemática: Evolução do Consumo de Água na Cidade de São Mateus do Sul.

O abastecimento de água na cidade de São Mateus do Sul é de responsabilidade da SANEPAR - Companhia de Saneamento do Paraná. Esta Companhia, criada em 1964, é uma empresa paranaense responsável pela captação, tratamento e distribuição de água neste Estado e sua preocupação é o abastecimento de água com boa qualidade.

Desde que iniciou suas atividades de operação, manutenção e administração de sistemas de abastecimento de água, a SANEPAR teve uma expansão considerável e atualmente controla e arquiva dados referentes ao consumo de água pela população das diversas cidades do Paraná.

As informações apresentadas no Quadro 1 retratam o consumo médio mensal de água em metros cúbicos (m^3) da cidade de São Mateus do Sul. Tais informações também podem ser observadas na Figura 1.

Quadro 1: Consumo mensal (médio)

Ano	Consumo médio mensal (m^3)
2001	886.233
2002	903.886
2003	952.639
2004	974.818
2005	1.039.443
2006	1.054.109
2007	1.084.599

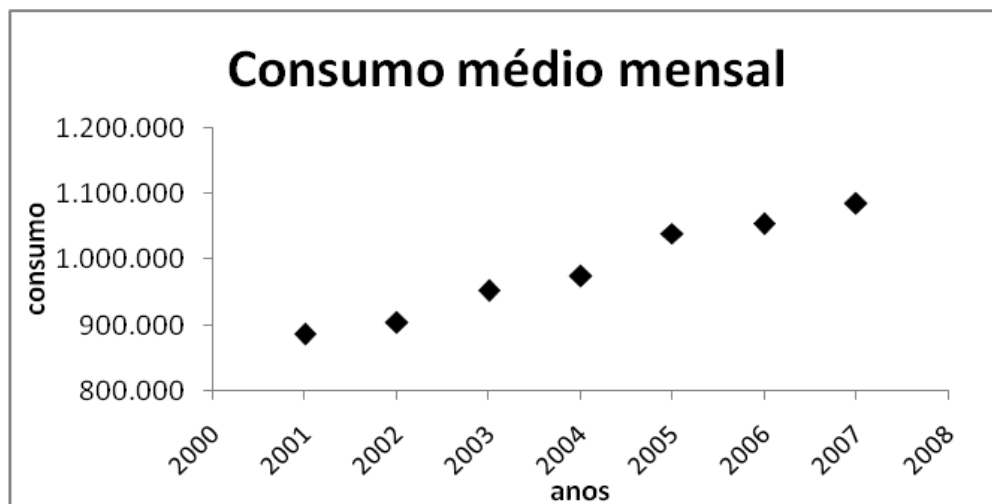


Figura 1: Tendência do consumo de água na cidade de São Mateus do Sul.

Os pontos apresentados na Figura 1 proporcionam o levantamento de hipóteses simplificadoras e permitem que algumas variáveis sejam definidas.

Hipóteses:

H_1 : A seqüência de consumos é crescente e limitada. Crescente porque $t_n < t_{n+1}$, $\forall n$ dado, e limitada porque analisando a curva de tendência percebemos que ela tende a se estabilizar, ou ainda, podemos dizer que um limitante inferior é $800.000 m^3$ e um limitante superior é $1.200.000 m^3$;

H_2 : $C_n \cong C_{n+1}$, o $\lim C_n = \lim C_{n+1} \cong C^*$;

H_3 : A variação de C_n em relação a C_{n+1} é proporcional a uma constante;

H_4 : A variação de $C^* - C_n$ em relação à t_n é proporcional ao valor de em cada t_n .

Variáveis definidas:

t_n : tempo, em anos;

C_n : consumo médio mensal, em m^3 ;

$C(t)$: consumo, em m^3 no tempo t ;

C^* : valor de estabilidade do consumo de água.

Uma Análise Preliminar dos Dados

Observando os dados do Quadro 1 podemos verificar que na cidade de São Mateus do Sul o consumo de água nos anos de 2001 a 2007 é crescente. Por outro lado, podemos supor que este consumo mensal é limitado, ou seja, este consumo não será infinitamente grande, mas irá estabilizar-se ao longo dos anos. Isto denota um comportamento assintótico dos dados no decorrer do tempo.

Na dedução de um modelo para descrever o consumo de água ao longo do tempo, é importante determinar o valor assintótico deste consumo que denominamos “valor de estabilidade”.

A Obtenção do Valor de Estabilidade

Levando em consideração as observações acima apresentadas, consideramos que o consumo durante estes anos determina uma seqüência (C_n) monótona crescente e também limitada. Logo, trata-se de uma seqüência convergente. Portanto, existe o limite da seqüência de consumo, isto é, existe um número real C^* tal que $\lim C_n = C^*$.

O valor limite C^* constitui o “ponto de estabilidade” do consumo de água. Para determiná-lo usamos um método conhecido como “Método de Ford-Walford”.

Dada a seqüência (C_n) de consumos mensais, a existência de um ponto de estabilidade é descrita pela condição $C_{n+1} \cong C_n$.

Assim, consideramos as seqüências monótonas crescentes e limitadas (C_n) e (C_{n+1}) definidas como no Quadro 2.

Quadro 2: (C_n) e (C_{n+1})

C_n	C_{n+1}
886.233	903.886
903.886	952.639
952.639	974.818
974.818	1.039.443
1.039.443	1.054.109
1.054.109	1.084.599

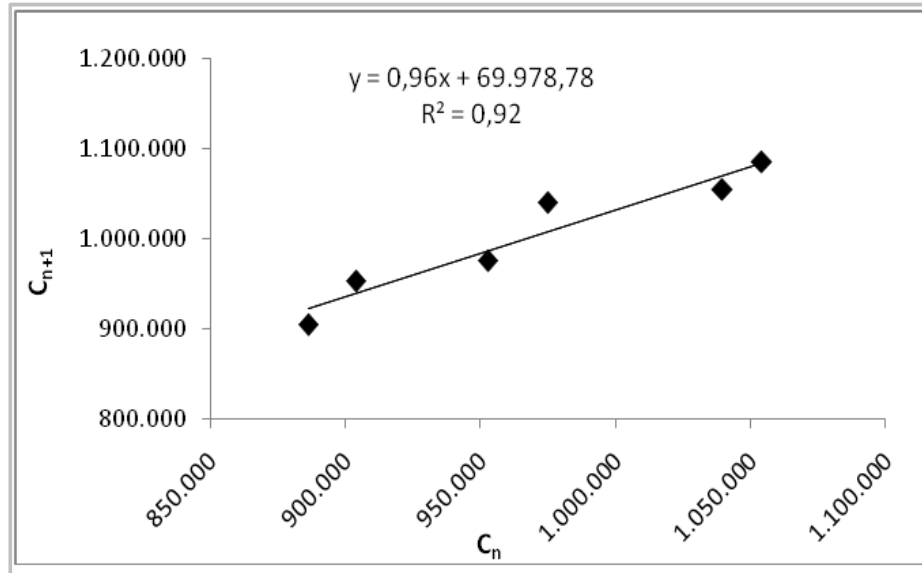


Figura 2 : Ajuste linear das seqüências C_n e C_{n+1}

Mesmo desprezando um dado em C_{n+1} temos que $\lim C_n = \lim C_{n+1} \cong C^*$. Consideremos agora os pontos do plano formados pelos pares (C_n, C_{n+1}) (Figura 2). Com isso determinamos uma função contínua f tal que $C_{n+1} = f(C_n)$ capaz de ajustar estes pares (C_n, C_{n+1}) .

Utilizamos o programa *Excel* para encontrar um ajuste linear para os pares (C_n, C_{n+1}) , ou seja, encontramos uma reta $C_{n+1} = aC_n + b$ (Figura 2).

Fazendo $C_{n+1} = C_n \cong C^*$ obtemos o ponto de estabilidade C^* :

$$C_{n+1} = (0,96)C_n + 69978,78$$

$$C_{n+1} = C_n \cong C^* = 1.749.469,5$$

A Diferença entre o Consumo e o Ponto de Estabilidade

Para analisar essa diferença fazemos C^* e C_n ao longo dos 07 anos (Quadro 3).

Quadro 3: $C^* - C_n$

Ano	t_n	C_n	$C^* - C_n$
2001	0	886.233	863.236,50
2002	1	903.886	845.583,50
2003	2	952.639	796.830,50
2004	3	974.818	774.651,50
2005	4	1.039.443	710.026,50
2006	5	1.054.109	695.360,50
2007	6	1.084.599	664.870,50

Podemos observar que a diferença $C^* - C_n$ vai diminuindo no decorrer do tempo. Sendo assim, podemos mesmo supor que $\lim_{n \rightarrow \infty} (C^* - C_n) = 0$ uma vez que $\lim_{n \rightarrow \infty} C^* = C_n$.

Deste modo, vamos usar um ajuste exponencial para os pares $(t_n, (C^* - C_n))$, ou seja, vamos procurar uma função do tipo $(C^* - C_n) = ae^{bt_n}$.

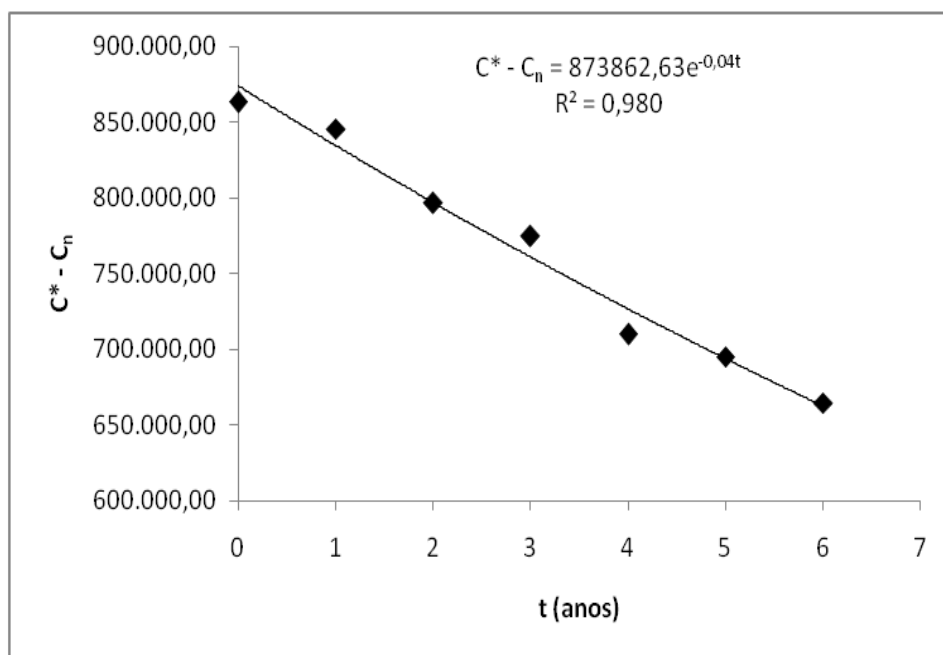


Figura 3: Ajuste exponencial

Logo a função ajustada é dada pela função:

$$C^* - C_n = 873862,63e^{-0,04t}$$

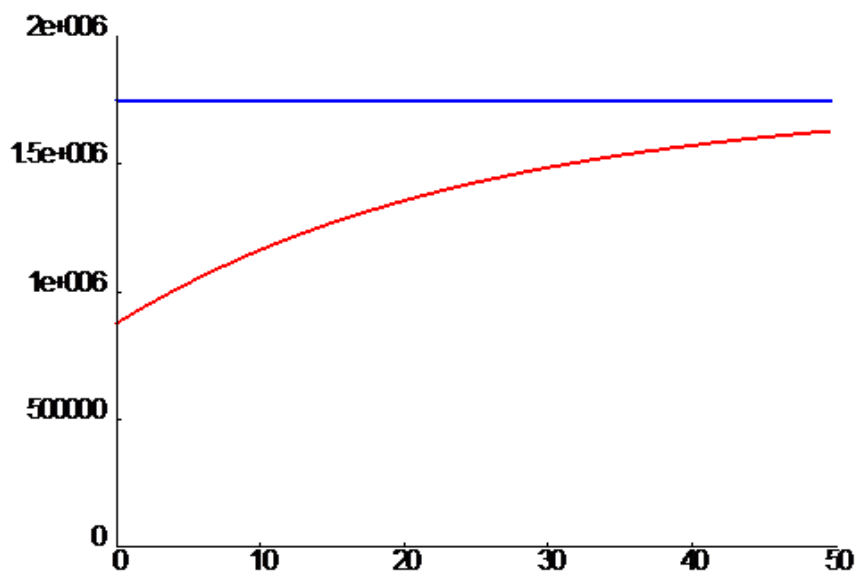
Deste modo, é possível, usando o valor de C^* já determinado, obter o modelo que fornece a expressão para C_n .

$$C_n = 1749469,50 - 873862,63e^{-0,04t_n}$$

Considerando o tempo como variável contínua (t) pode-se escrever:

$$C(t) = 1749469,50 - 873862,63e^{-0,04t}$$

Representação Gráfica (plotado no Gnuplot):



Validação do Modelo Encontrado

A validação de um modelo consiste em comparar os dados observados, neste caso os dados obtidos junto à SANEPAR, com os dados estimados pelo modelo. Fazemos esta comparação no Quadro 4.

Quadro 4: Comparação entre os dados observados e o valores obtidos pelo modelo

Ano	t_n	C_n (Consumo observado)	$C^* - C_n$ (modelo)	Erro (%)
2001	0	886.233	875.606,87	1,199022153
2002	1	903.886	909.871,51	-0,662197869
2003	2	952.639	942.792,62	1,033589665
2004	3	974.818	974.422,87	0,040533251
2005	4	1.039.443	1.004.812,89	3,331602845
2006	5	1.054.109	1.034.011,29	1,906606352
2007	6	1.084.599	1.062.064,81	2,077651879

Com o desenvolvimento desse trabalho foi possível perceber algumas aplicações dos conceitos matemáticos quando se busca compreender aspectos atrelados ao dia a dia. Também foi nos proporcionado um repensar sobre os conceitos anteriormente apreendidos no que refere à Matemática e à Modelagem Matemática. O uso de ferramentas computacionais é outro fator relevante no desenvolvimento desse trabalho.

Ainda não foi realizada na ocasião desse trabalho, mas que enriqueceria a atividade é estudar esse modelo por meio de uma equação diferencial e também analisar a evolução populacional no mesmo período, de forma a investigar se o crescimento do consumo ocorreu na mesma proporção do crescimento populacional.

Referências Bibliográficas:

ALMEIDA, L. M. W. **Modelagem Matemática em sala de aula: em direção à Educação Matemática Crítica**. In: *III CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2003. Anais eletrônicos da III CNMEM.

Piracicaba - SP, 2003 b.p.1 - 10. 1 CD.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** São Paulo: Contexto, 2002.

BICUDO, M.A.V. **Filosofia da Educação Matemática: um enfoque tecnológico.** In: BICUDO, A.M.V. (org.) *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.* São Paulo: Editora UNESP, 1999.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia.** Tradução Abgail Lins e Jussara L. Araújo, Campinas: Editora Papiros, 2001.